

**Titre (*title*) : Résolution numérique des problèmes de commande optimale à solution "bang-bang" à l'aide de techniques de lissage - Application aux transferts interplanétaires à poussée faible en consommation minimale** (*Numerical solution of "bang-bang" optimal control problems by smoothing techniques - Application to fuel-saving low-thrust interplanetary missions*)

**Auteurs (*Authors*) : Régis BERTRAND et Richard EPENYOY** du Centre Spatial de Toulouse

**Mots clés (*Keywords*) : Commande optimale** *Optimal control*, **Commande "bang-bang"** *"Bang-bang" control*, **Techniques de lissage** *Smoothing techniques*, **Missions interplanétaires** *Interplanetary missions*

**Résumé :**

Nous nous intéressons dans ce document à la résolution numérique des problèmes de commande optimale à solution "bang-bang". Le caractère discontinu de la commande optimale induit d'importantes difficultés de résolution et des techniques spécifiques doivent être utilisées dans ce cas. Nous montrons comment les techniques de lissage de la commande, associées à un processus de continuation, permettent de pallier efficacement ces difficultés. Des preuves de convergence du processus de continuation seront données et les commandes lissées seront vues comme les solutions d'un problème de commande optimale perturbé.

**Abstract:**

We are interested in this paper in the numerical solution of "bang-bang" optimal control problems. The non-smoothness of the control yields important numerical difficulties and specific techniques are needed. We show that smoothing techniques on the control variable associated with a continuation procedure can solve the problem efficiently. Convergence proofs are given and the smoothed controls will be interpreted as the solutions of a perturbed optimal control problem.

# Sommaire

<b>Glossaire</b>	<b>4</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2 Les problèmes à solution "bang-bang"</b>	<b>6</b>
2.1 Formulation du problème . . . . .	6
2.2 Les difficultés numériques . . . . .	7
2.3 Un exemple illustratif . . . . .	8
<b>3 Méthode de résolution par continuation</b>	<b>10</b>
3.1 Approche par continuation . . . . .	11
3.2 Utilisation des fonctions de pénalité . . . . .	13
3.2.1 Les pénalités quadratiques . . . . .	13
3.2.2 Génération de fonctions de pénalité . . . . .	14
3.2.3 Retour à l'exemple illustratif de la section 2.3 . . . . .	20
3.2.4 Conclusion . . . . .	23
3.3 Utilisation des barrières logarithmiques pour la résolution de problèmes de commande optimale . . . . .	23
3.3.1 Formulation du problème . . . . .	23
3.3.2 Liens avec les fonctions de densité . . . . .	24
3.3.3 Retour à l'exemple illustratif de la section 2.3 . . . . .	26
<b>4 Application aux transferts interplanétaires</b>	<b>28</b>
4.1 Modélisation . . . . .	28
4.2 Application du principe du maximum de Pontryagin . . . . .	29
4.3 Quelques hypothèses . . . . .	31
4.4 Méthodes de continuation-lissage . . . . .	32
4.4.1 Pénalités quadratiques . . . . .	32
4.4.2 Pénalités logarithmiques . . . . .	32
4.4.3 Barrières logarithmiques . . . . .	33
4.4.4 Algorithme de continuation . . . . .	33
4.5 Exemples numériques . . . . .	33
4.5.1 Exemple 1 : Trajectoire Terre-Vénus en consommation minimum . . . . .	33
4.5.2 Exemple 2 : Trajectoire Terre-Jupiter en consommation minimum . . . . .	36
<b>5 Conclusions</b>	<b>39</b>
<b>Références</b>	<b>39</b>
<b>A La méthode Hybrid-Powell</b>	<b>42</b>

<b>B</b>	<b>Développements analytiques pour les problèmes à solution "bang-bang"</b>	<b>43</b>
B.1	Solution analytique de l'exemple simple . . . . .	43
B.2	Cas où $z$ est positif . . . . .	44
B.3	Cas où $z$ est négatif . . . . .	45
B.4	Conclusion . . . . .	47
<b>C</b>	<b>Approche par pénalités quadratiques</b>	<b>47</b>
C.1	Calcul de la commande optimale . . . . .	47
C.2	Calcul de la fonction de pénalité à partir du choix de la fonction de densité . . .	48

# Glossaire

NAG	Bibliothèque de programmes numériques commercialisée par <i>Numerical Algorithm Group</i> .
TPBVP	Two-Point Boundary Value Problem, problème d'équations différentielles aux deux bouts.
PMP	Principe du Maximum de Pontryagin.

# 1 Introduction

Le sujet principal de cette note technique est la résolution numérique des problèmes de commande optimale à solution "bang-bang". Cette appellation caractérise une commande discontinue, prenant ses valeurs aux bornes de son ensemble de définition. Une formulation générale de ce type de problèmes et l'application du Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) [5],[7],[30] dans ce cas précis sont proposées en section 2.1. La principale difficulté de résolution numérique provient dans ce cas de la détermination précise des dates de commutation de la commande lorsque ces dernières sont nombreuses. Ceci est dû au fait que les fonctions dites de tir associées à ces problèmes qui sont construites à partir des conditions nécessaires de Pontryagin peuvent ne pas être définies partout, peuvent être discontinues ou non différentiables. Par ailleurs, leur matrice jacobienne peut être singulière sur tout un domaine. Tout cela implique que les "bassins d'attraction" des racines des fonctions de tir sont de très faible dimension, induisant une grande difficulté d'initialisation des méthodes de tir. Ces dernières, qui s'appuient sur des schémas de type Newton, ne convergent en effet que si l'estimation initiale de la solution est très bonne. Pour éviter ces problèmes numériques, une approche classique consiste à introduire un terme perturbateur ayant une forme quadratique dépendant d'un paramètre dans la fonction objectif du problème. Le lecteur peut se référer aux travaux suivants [13], [14], [15] et [27], pour plus de précisions sur cette approche. Cette dernière permet d'obtenir une commande optimale et une fonction de tir continues. Le paramètre de perturbation est alors mis à jour à travers une procédure de continuation ou d'homotopie [20]. Le but de cette note technique est de construire une nouvelle classe de commandes optimales continûment différentiables presque partout en définissant de nouveaux termes perturbateurs. Tout ceci est développé dans l'optique d'obtenir de meilleurs résultats que ceux obtenus avec l'approche quadratique usuelle. Cet objectif sera atteint grâce aux techniques de lissage développées en section 3.2.2. Les techniques de lissage ne sont pas nouvelles dans la littérature : elles sont utilisées par exemple pour résoudre des problèmes de commande optimale avec des contraintes sur l'état et la commande [16], [17], pour résoudre des inéquations variationnelles [11], ainsi qu'avec les méthodes de points intérieurs en optimisation [22] ou bien encore en optimisation non différentiable [26]. Un des points importants de cette étude est l'utilisation de techniques de lissage basées sur l'introduction de barrières logarithmiques. Ces dernières sont utilisées avec succès dans le cadre de l'optimisation en dimension finie, voir par exemple [18], [23] et [29]; l'idée a été de les appliquer dans le contexte de la commande optimale. Après quelques développements analytiques, leur efficacité est montrée à travers la résolution d'un exemple simple, voir section 3.3. Finalement, en section 4, toutes les techniques proposées sont appliquées aux problèmes de transferts interplanétaires à poussée faible. Ces derniers exemples montrent la stricte nécessité d'utiliser ces techniques afin d'obtenir des solutions à l'aide des méthodes de tir.

## 2 Les problèmes à solution "bang-bang"

Cette section propose une formulation générale et les conditions nécessaires d'optimalité associées à des problèmes de commande optimale à solution "bang-bang". Les difficultés rencontrées lors de la résolution numérique de ces problèmes sont exposées en section 2.2. Ces difficultés sont finalement illustrées à travers un exemple simple dans la section 2.3.

### 2.1 Formulation du problème

Considérons un système dont les équations d'état sont non linéaires par rapport au vecteur d'état et affines en la commande<sup>1</sup>. De tels modèles s'écrivent de la façon suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad t \in [t_0, t_1] \quad (1)$$

La dimension du vecteur d'état  $x(\cdot)$  et celle du vecteur de commande  $u(\cdot)$  sont notées respectivement  $n$  et  $m$  et  $g(x(t))$  est une matrice de dimension  $n \times m$ . On suppose que l'état et la commande appartiennent aux espaces fonctionnels usuels pour ce type de problèmes [7] et que les fonctions  $f(\cdot)$  et  $g(\cdot)$  sont continûment différentiables. Les conditions initiales sont données par  $x(t_0) = x_0$  et le vecteur d'état à l'instant final doit vérifier la contrainte  $\psi_1(t_1, x(t_1)) = 0$ . La fonction objectif qui doit être minimisée est définie sur l'horizon de temps  $[t_0, t_1]$  par :

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\| dt \quad (2)$$

L'ensemble d'admissibilité de la commande est noté  $\mathcal{U}$  et s'écrit de la manière suivante :

$$\mathcal{U} = \{u \in L^2([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m), \|u(t)\| \leq 1, \quad \forall t \in [t_0, t_1]\} \quad (3)$$

où  $L^2([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$  désigne l'espace des fonctions mesurables de carré sommable de  $[t_0, t_1]$  vers  $\mathbb{R}^m$ . L'expression de l'hamiltonien associé à la résolution du problème par le PMP [5], [7], [30] est alors la suivante :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = \|u(t)\| + \lambda(t)^T [f(x(t)) + g(x(t))u(t)] \quad (4)$$

où dans toute la suite l'exposant  $T$  désigne l'opérateur de transposition et  $\lambda(\cdot)$  désigne le vecteur état adjoint. Dans ce cas précis, la commande optimale est alors donnée par [7] :

$$u^*(t) = \arg \min_{\|w\| \leq 1} [\|w\| + \lambda(t)^T g(x(t))w], \quad t \in [t_0, t_1] \quad (5)$$

Il est clair que si  $\lambda(t)^T g(x(t)) = 0$  alors  $u^*(t) = 0$ . Dans le cas contraire, il est possible d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\|w\| + \lambda(t)^T g(x(t))w \geq \|w\|(1 - \|g(x(t))^T \lambda(t)\|), \quad \forall w \mid \|w\| \leq 1 \quad (6)$$

<sup>1</sup>Les problèmes de transferts interplanétaires peuvent s'écrire sous cette forme, voir section 4.

L'égalité est vérifiée lorsque les vecteurs  $w$  et  $g(x(t))^T \lambda(t)$  sont colinéaires et de sens opposé, c'est-à-dire :

$$w = -\kappa(t)g(x(t))^T \lambda(t), \quad \kappa(t) > 0 \quad (7)$$

Ainsi :

$$\|u^*(t)\| = \kappa(t)\|g(x(t))^T \lambda(t)\| = \beta(t) \quad (8)$$

où  $\beta(\cdot)$  est donnée par :

$$\beta(t) = \arg \min_{0 \leq y \leq 1} [\Theta(y) = y\rho(t)], \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (9)$$

$\rho(\cdot)$  est la **fonction de commutation** ; son expression est :

$$\rho(t) = 1 - \|g(x(t))^T \lambda(t)\| \quad (10)$$

On obtient alors facilement l'expression de la commande optimale. En effet, si  $\lambda(t)^T g(x(t)) \neq 0$  alors :

$$u^*(t) = -\beta(t) \frac{g(x(t))^T \lambda(t)}{\|g(x(t))^T \lambda(t)\|} \quad (11)$$

avec :

$$\beta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho(t) < 0 \\ 0 & \text{si } \rho(t) > 0 \\ w \in [0, 1] & \text{si } \rho(t) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Si on fait l'hypothèse que la fonction de commutation  $\rho(\cdot)$  ne s'annule qu'en des points isolés, c'est à dire qu'il n'y a pas d'arcs singuliers (ce que l'on vérifie numériquement), la commande peut être alors qualifiée de "bang-bang" car, presque partout sur  $[t_0, t_1]$ , le module de la commande atteint ses bornes, i.e. 0 ou 1. Le système différentiel donnant l'évolution au cours du temps de l'état adjoint  $\lambda(\cdot)$  et les conditions de transversalité en  $t_1$ , qui relie  $\lambda(t_1)$  à  $t_1$  et  $x(t_1)$  sont obtenus en appliquant le PMP [7]. Ces conditions de transversalité constituent ce que l'on nomme la fonction de tir, notée  $\Phi(\cdot)$  dont l'inconnue est le vecteur  $z$  composé de  $\lambda(t_0)$  et éventuellement de  $t_1$  si celui-ci n'est pas fixé. Il faut alors résoudre un système d'équations qui peut s'écrire sous la forme  $\Phi(z) = 0$ .

**Remarque 2.1** *Les conditions de transversalité s'appliquent en  $t_1$ , alors que le vecteur inconnu  $z$  contient des conditions initiales. C'est pourquoi, le problème à résoudre est aussi qualifié de  **système différentiel aux deux bouts**  ou *Two-Point Boundary Value Problem (TPBVP) en anglais.**

## 2.2 Les difficultés numériques

Cette section résume les principales difficultés numériques rencontrées lors de la résolution effective des problèmes à solution "bang-bang".

Dans un premier temps, pour calculer la valeur de la fonction de tir, il est nécessaire d'intégrer des équations différentielles dont les seconds membres ne sont pas continus dans le temps. Dans ce contexte, les algorithmes d'intégration à pas adaptatif, de type Runge-Kutta [28], divergent. Ils n'arrivent donc pas à assurer la précision demandée lorsque le nombre d'instantants de discontinuité, i.e. instants de commutation, est important, cf. par exemple [19] et [31]. Dans ce cas, la valeur de la fonction de tir ne peut être évaluée (en effet, l'intégration ne peut se dérouler jusqu'au bout) ou bien l'est avec une précision médiocre.

Par ailleurs, nous utilisons la méthode Hybrid-Powell (voir annexe A et [28]) pour la recherche des racines de la fonction de tir. Cette méthode est en partie basée sur un algorithme de type Newton. Donc, pour qu'elle converge, il faut que la fonction de tir soit suffisamment régulière, i.e. matrice jacobienne non singulière, dans un voisinage des racines. Ce voisinage est de taille restreinte pour des fonctions de tir telles que celles provenant des problèmes "bang-bang". C'est pourquoi, des techniques de lissage ou de régularisation sont utilisées afin d'étendre le bassin d'attraction des racines.

### 2.3 Un exemple illustratif

Cette section propose un exemple simple afin d'illustrer les difficultés numériques précédemment énoncées. L'état  $x(t)$  et la commande  $u(t)$  sont ici des variables scalaires. Le temps  $t$  est pris dans l'intervalle  $[0, 2]$ . L'équation différentielle décrivant l'évolution du système ainsi que les conditions initiales et finales sont spécifiées ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t), & t \in [0, 2] \\ x(0) = 0, \quad x(2) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (13)$$

En dimension 1, la contrainte sur la commande (3) et la fonction objectif (2) à minimiser s'écrivent de la façon suivante :

$$\min_{|u(t)| \leq 1} \int_0^2 |u(t)| dt \quad (14)$$

En adoptant la même démarche qu'en section 2.1, la commande optimale  $u^*(t)$  est solution de :

$$\min_{|w| \leq 1} |w| + \lambda(t)w, \quad t \text{ fixé dans } [0, 2] \quad (15)$$

Trivialement, ceci conduit à l'expression générale suivante :

$$\begin{cases} u^*(t) = -\beta(t) \frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|}, & \text{si } \lambda(t) \neq 0 \\ u^*(t) = 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad t \in [0, 2] \quad (16)$$

où  $\beta(t)$  est donnée par (12) avec comme fonction de commutation  $\rho(t) = 1 - |\lambda(t)|$ . En outre, le PMP permet d'obtenir l'équation différentielle décrivant l'évolution de l'état adjoint. Ainsi,

on a :

$$\dot{\lambda}(t) = \lambda(t) \quad (17)$$

Cette équation a pour solution :

$$\lambda(t) = z \exp(t), \quad \text{avec } z = \lambda(0) \quad (18)$$

Ce problème peut ainsi être résolu analytiquement. Une formulation analytique de la fonction de tir  $\Phi(\cdot)$  associée au problème défini par (14) et (13) peut être obtenue. Les calculs sont développés en annexe B.1. On a donc :

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \exp(-2) & \text{si } z \in ]-\infty, -1[ \\ \frac{\exp(-2)}{z} + \frac{1}{2} & \text{si } z \in [-1, -\exp(-2)[ \\ -\frac{1}{2} & \text{si } z \in [-\exp(-2), \exp(-2)[ \\ \frac{\exp(-2)}{z} - \frac{3}{2} & \text{si } z \in [\exp(-2), 1[ \\ \exp(-2) - \frac{3}{2} & \text{si } z \in [1, +\infty[ \end{cases} \quad (19)$$

avec  $z = \lambda(0)$ . La représentation graphique de cette fonction est donnée en figure (1). Obtenir la solution du problème de commande optimale revient à trouver la racine  $z^*$  de la fonction  $\Phi(z)$  donnée par (19).

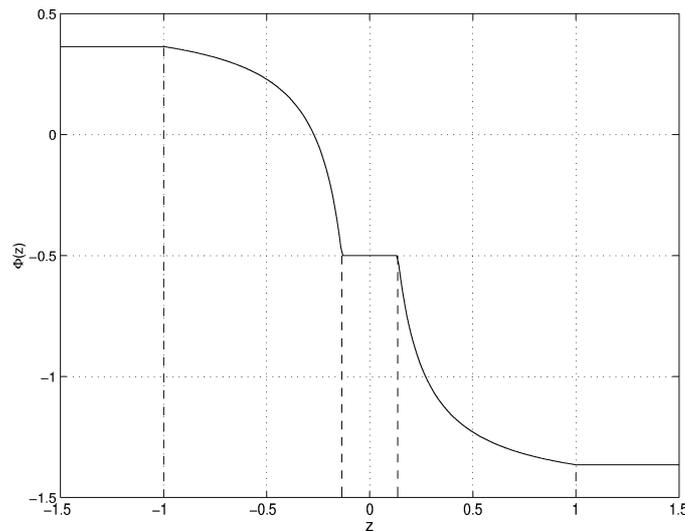


FIG. 1 – Fonction de tir associée à l'exemple simple.

Cette racine est alors  $z^* = -2 \exp(-2) \simeq -0.2707$ . Il est maintenant intéressant de déterminer numériquement le bassin d'attraction de cette racine. Ainsi, en prenant des valeurs initiales de  $z$  dans  $\mathbb{R}$  et en appliquant la méthode Hybrid-Powell à partir de chacun de ces points, le bassin d'attraction est alors composé des points initiaux pour lesquels la méthode converge vers  $z^*$ . Il est déjà clair que la méthode est vouée à diverger pour des points initiaux pris dans les intervalles  $] -\infty, -1[$ ,  $[-\exp(-2), \exp(-2)[$  et  $[1, +\infty[$ . En effet, la fonction de tir étant constante sur ces intervalles, les pas de descente ou relatifs à la méthode de Newton ne peuvent être déterminés car la fonction dérivée est nulle. Finalement, le bassin d'attraction  $\mathbb{C}$  de la racine  $z^*$  est le suivant :

$$\mathbb{C} \simeq [-1, -\exp(-2)] \cup [0.17, 0.467] \quad (20)$$

Donc, le choix du point initial n'est pas anodin même pour cet exemple en dimension 1. Ce choix représente une véritable difficulté lorsque des problèmes de dimension supérieure sont traités. Finalement, la trajectoire optimale  $x^*(\cdot)$  et la commande optimale  $u^*(\cdot)$  sont représentées en figure 2. La commande présente une commutation à  $t \simeq 1.3$ , date à partir de laquelle la variable d'état croît jusqu'à atteindre sa valeur terminale.

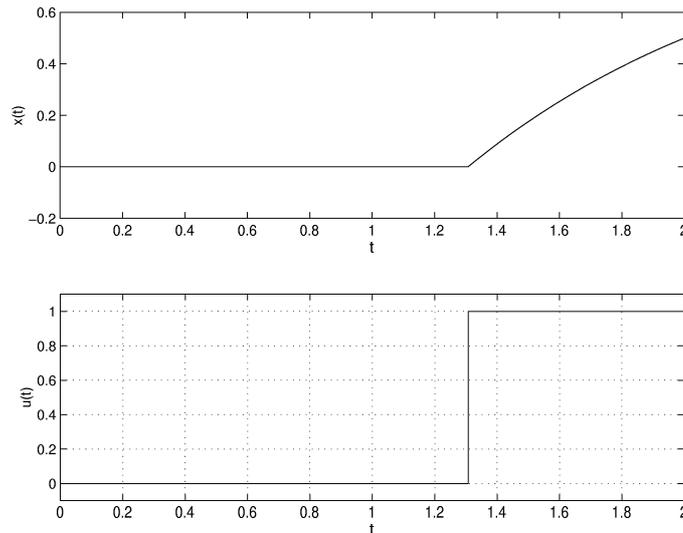


FIG. 2 – Trajectoire et commande optimales associées à l'exemple simple.

### 3 Méthode de résolution par continuation

Cette section propose une méthode générale facilitant la résolution numérique des problèmes à solution "bang-bang". Son principe consiste à perturber la fonction objectif du problème initial par un terme dépendant d'un paramètre  $\epsilon$  et prenant la forme d'une fonction de pénalité ou d'une fonction barrière. Le critère initial doit être retrouvé pour  $\epsilon = 0$ . Ensuite, grâce à une approche par continuation, les solutions successives du problème perturbé vont converger vers

la solution du problème initial. L'efficacité de cette méthode est illustrée par un exemple simple en fin de section.

### 3.1 Approche par continuation

Cette section propose une approche pour résoudre le problème défini par (1), (2), (3) à partir des solutions successives d'un problème auxiliaire. Ce dernier est défini par les équations d'état (1), l'ensemble d'admissibilité de la commande  $\mathcal{U}$  donné par (3) et par la fonction objectif suivante :

$$J_\epsilon = \int_{t_0}^{t_1} [\|u(t)\| - \epsilon F(\|u(t)\|)] dt = \int_{t_0}^{t_1} h(u(t), \epsilon) dt \quad (21)$$

où le paramètre  $\epsilon$  appartient à l'intervalle  $]0, 1]$  et où la fonction  $h(u(t), \cdot)$  est supposée continue. Cette approche est qualifiée d'approche par **pénalités** lorsque la fonction  $F(\cdot)$  prend des valeurs finies en 0 et 1, et d'approche par fonctions **barrières** lorsque  $F(w) \rightarrow -\infty$  quand  $w$  tend vers 0 ou 1.

La procédure de continuation consiste dans un premier temps à résoudre le TPBVP obtenu par application du PMP pour  $\epsilon = 1$ . Puis, en définissant une suite décroissante de valeurs de  $\epsilon$  ( $\epsilon_1 = 1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_n$ ), le TPBVP associé à  $\epsilon = \epsilon_k$  ( $k = 2 \dots n$ ) sera résolu en utilisant la solution de l'étape  $k-1$  comme point initial de la méthode de résolution (Hybrid-Powell). Cette procédure se termine lorsque la précision désirée sur la fonction objectif, notée  $\vartheta$ , est atteinte i.e :

$$|J_{\epsilon_{k+1}}(u_{\epsilon_{k+1}}^*) - J_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}^*)| \leq \vartheta, \quad \vartheta > 0, \text{ avec } k \text{ suffisamment grand} \quad (22)$$

Pour montrer que la suite  $J_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}^*)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , converge vers  $J(u^*)$ , il est nécessaire d'énoncer la proposition suivante, **en supposant dans un premier temps que  $F(w) \geq 0$  pour tout  $w$  dans  $[0,1]$ .**

**Proposition 3.1** *Soit un problème de commande optimale de fonction objectif (21), de dynamique (1) avec des conditions initiales et finales données, et dont la contrainte sur la commande est définie par (3), alors, pour toute suite décroissante  $\epsilon_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\epsilon_1 = 1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_n$ , les fonctions objectif associées vérifient les inégalités suivantes :*

$$J_{\epsilon_1}(u_{\epsilon_1}^*) \leq J_{\epsilon_2}(u_{\epsilon_2}^*) \leq \dots \leq J_{\epsilon_{n-1}}(u_{\epsilon_{n-1}}^*) \leq J_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}^*) \leq J(u^*) \leq J(u_{\epsilon_k}^*), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

où  $u_\epsilon^*$  dénote la commande optimale associée à  $J_\epsilon$  et  $u^*$  est la commande optimale du problème initial donnée par (11) et (12).

Ainsi, toutes les fonctions objectif intervenant dans le processus itératif sont majorées par la fonction objectif du problème initial. La proposition suivante permet de montrer la convergence de la suite  $J_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}^*)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  vers  $J(u^*)$ .

**Proposition 3.2** *Il est supposé que l'ensemble des solutions admissibles du problème initial est non vide, que  $x(t)$  reste dans un compact fixe de  $\mathbb{R}^n$  pour  $t \in [t_0, t_1]$ . Alors, sous ces hypothèses,*

il existe une solution aux problèmes (21), (1), (3) pour tout  $\epsilon$  dans  $]0,1[$  et les fonctions objectif (21) associées vérifient :

$$\begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_\epsilon(u_\epsilon^*) = J(u^*) \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} J(u_\epsilon^*) = J(u^*) \end{cases}$$

Les preuves des propositions 3.1 et 3.2 sont données par J. Gergaud dans [20].

**Dans le cas où  $F(w) \leq 0$  pour tout  $w$  dans  $]0,1[$ ,** il est clair que la fonction  $h(u(t), \cdot)$  est croissante et de ce fait, la fonction  $J_\epsilon(u_\epsilon^*)$  est croissante par rapport à  $\epsilon$ . Des résultats similaires à ceux énoncés ci-dessus peuvent alors être obtenus. Ils proviennent des travaux de D.J. Bell [2] réalisés dans le cadre de la méthode “ $\epsilon$ -algorithm” (introduction d’un terme perturbateur quadratique en la commande dans la fonction objectif). Ces résultats sont les suivants :

**Proposition 3.3** Pour tout  $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ ,  $k > l$  ( $\epsilon_k < \epsilon_l$ ),

$$J_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}^*) \leq J_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l}^*)$$

De plus :

$$J_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}^*) \geq \min_{u \in \mathcal{U}} J(u) = \nu_0, \quad \nu_0 \in \mathbb{R}$$

**Preuve :** En utilisant les propriétés du minimum et le fait que la fonction  $J_\epsilon(u_\epsilon^*)$  est croissante par rapport à  $\epsilon$ , il est possible d’écrire :

$$J_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}^*) = \min_{u \in \mathcal{U}} J_{\epsilon_k}(u) \leq J_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_l}^*) \leq J_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l}^*) \quad (23)$$

De plus,

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J_{\epsilon_k}(u) = \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ J(u) - \underbrace{\epsilon \int_{t_0}^{t_1} F(\|u(t)\|) dt}_{\geq 0} \right\} \geq \nu_0 \quad (24)$$

□

La proposition prouvant la convergence de la suite  $J_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}^*)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , peut alors être énoncée.

**Proposition 3.4** En reprenant les hypothèses de la proposition 3.2 et en rappelant que  $F(w) \leq 0$  pour tout  $w \in ]0,1[$ , alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}^*) = \nu_0 = J(u^*)$$

avec  $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$ .

**Preuve :** Puisque la suite  $J_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}^*)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , est décroissante et bornée par  $\nu_0$ , voir proposition 3.3, elle est donc convergente. En supposant que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}^*) = \bar{\nu} > \nu_0 \quad (25)$$

Puisque l'intervalle  $[t_0, t_1]$  est fini et que  $F(w)$  a des valeurs finies pour  $w$  dans  $]0, 1[$ , alors il existe  $\epsilon_l$  suffisamment petit tel que :

$$J_{\epsilon_l}(u^*) < \bar{\nu} \quad (26)$$

Ceci implique que :

$$J_{\epsilon_l}(u_{\epsilon_l}^*) \leq J_{\epsilon_l}(u^*) < \bar{\nu} \quad (27)$$

Or, la suite  $J_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}^*)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , étant décroissante, on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}^*) < \bar{\nu} \quad (28)$$

Cette dernière relation est en contradiction avec (25), donc la suite  $J_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}^*)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , converge vers  $\nu_0$ .

□

Les propositions 3.1 et 3.2 dans le cas où  $F(w) \geq 0$ ,  $w \in ]0, 1[$ , ou 3.3 et 3.4 pour  $F(w) \leq 0$ ,  $w \in ]0, 1[$ , justifient l'utilisation de la méthode de continuation proposée. L'efficacité de la méthode est alors liée aux propriétés des problèmes auxiliaires, i.e. aux propriétés de la fonction  $F(\cdot)$ , intervenant dans le processus de continuation.

## 3.2 Utilisation des fonctions de pénalité

### 3.2.1 Les pénalités quadratiques

L'approche par fonctions de pénalité la plus utilisée est l'approche quadratique. Le lecteur désireux de connaître diverses applications de cette approche peut par exemple se référer aux articles suivants [12], [13], [21] et [27]. Le principe consiste à introduire un terme relatif à l'énergie, i.e.  $\|u(t)\|^2$ , dans la fonction objectif du problème initial. En reprenant les notations de la section précédente, la fonction objectif devient :

$$J_\epsilon^1 = \int_{t_0}^{t_1} [\|u(t)\| - \epsilon \|u(t)\|(1 - \|u(t)\|)] dt = \int_{t_0}^{t_1} h^1(u(t), \epsilon) dt \quad (29)$$

Ici, il est clair que :

$$F^1(w) = w(1 - w) \geq 0, \quad \forall w \in [0, 1] \quad (30)$$

Les propositions 3.1 et 3.2 peuvent alors être appliquées pour montrer la convergence de la suite  $J_{\epsilon_k}^1(u_{\epsilon_k}^*)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , vers  $J(u^*)$ . La commande optimale associée à la fonction objectif (29) est la suivante :

$$u_\epsilon^*(t) = -\beta_\epsilon^1(t) \frac{g(x(t))^T \lambda(t)}{\|g(x(t))^T \lambda(t)\|}, \quad \text{si } g(x(t))^T \lambda(t) \neq 0 \quad (31)$$

et,

$$u_\epsilon^*(t) = 0, \quad \text{si } g(x(t))^T \lambda(t) = 0 \quad (32)$$

avec,

$$\beta_\epsilon^1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho(t) \leq -\epsilon \\ \frac{1}{2} - \frac{\rho(t)}{2\epsilon} & \text{si } |\rho(t)| \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } \rho(t) \geq \epsilon \end{cases} \quad (33)$$

où la fonction de commutation  $\rho(t)$  est donnée par (10). Les calculs permettant d'aboutir aux formules (31), (32) et (33) sont développés en annexe C.1.

En posant  $\beta_\epsilon^1(t) = \tilde{\beta}_\epsilon^1(z)$  et  $\beta(t) = \tilde{\beta}(z)$  où  $\rho(t) = z$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\|\tilde{\beta}_\epsilon^1(z) - \tilde{\beta}(z)\|_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{\beta}_\epsilon^1(z) - \tilde{\beta}(z)]^2 dz = \frac{1}{6}\epsilon \quad (34)$$

Cela signifie que la fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon^1(\cdot)$  converge dans  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vers la fonction  $\tilde{\beta}(\cdot)$  quand  $\epsilon$  tend vers 0. Comme  $h^1(\cdot, \epsilon)$  est strictement convexe et  $g(\cdot)$  est continûment différentiable, alors  $u_\epsilon^*(\cdot)$  est continue [20]. Malheureusement, cette fonction n'est pas différentiable du fait de la non différentiabilité de la fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon^1(\cdot)$  (voir (33)). Néanmoins,  $u_\epsilon^*(\cdot)$  présente un ordre de régularité supérieur à celui de la commande "bang-bang" définie par (11), (12) et (10). Il peut maintenant s'avérer intéressant de disposer d'une méthode permettant de générer des fonctions de pénalité conduisant à des commandes régulières, c'est ce que nous allons développer dans le paragraphe suivant.

### 3.2.2 Génération de fonctions de pénalité

Cette section propose une technique permettant d'obtenir diverses fonctions de pénalité dans l'optique d'améliorer les propriétés de la commande  $u^*(\cdot)$ . L'idée essentielle est de considérer la fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon(\cdot)$  comme le résultat du produit de convolution entre la fonction  $\tilde{\beta}(\cdot)$  et une fonction de densité  $f_0(\cdot)$ , i.e.

$$\tilde{\beta}_\epsilon(z) = (\tilde{\beta} \star f_0) \left( \frac{z}{\epsilon} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\beta} \left( \frac{z}{\epsilon} - s \right) f_0(s) ds = \int_{\frac{z}{\epsilon}}^{+\infty} f_0(s) ds = P \left( X \geq \frac{z}{\epsilon} \right) \quad (35)$$

où  $\star$  dénote le produit de convolution dans  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $P(\cdot)$  désigne la probabilité d'un événement et  $X$  désigne une variable aléatoire de densité  $f_0(\cdot)$ . L'utilisation des fonctions de densité pour les techniques de lissage n'est pas nouveau dans la littérature. Ces dernières sont utilisées, entre autres, pour résoudre des équations non régulières (*nonsmooth equations*), [8], [10], mais aussi dans le cas d'inégalités variationnelles formulées comme des équations non régulières, [11], [9], dans le cadre de l'optimisation convexe [22], ou bien encore en contrôle optimal des équations variationnelles [1].

**Remarque 3.1** *Pour toute la suite de ce chapitre, il est convenu que  $\beta(t)$  est pris égal à  $\tilde{\beta}(z)$  avec  $\rho(t) = z$ ,  $z \in \mathbb{R}$ .*

Ainsi,  $\tilde{\beta}_\epsilon(z)$  peut être vue comme la probabilité qu'une variable aléatoire de fonction de densité  $f_0(\cdot)$  soit supérieure ou égale à  $z/\epsilon$ , ce qui peut encore s'écrire :

$$\tilde{\beta}_\epsilon(z) = 1 - \int_{-\infty}^{\frac{z}{\epsilon}} f_0(s) ds = 1 - \mathcal{F}_0\left(\frac{z}{\epsilon}\right) \quad (36)$$

où  $\mathcal{F}_0(\cdot)$  est la fonction de répartition associée à la fonction de densité  $f_0(\cdot)$ . Grâce à cette écriture, on peut énoncer la proposition suivante :

**Proposition 3.5** *Toute fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon(\cdot)$  vérifiant (35) satisfait les propriétés suivantes :*

- (i)  $\tilde{\beta}_\epsilon(\cdot)$  est continue,
- (ii)  $\tilde{\beta}_\epsilon(\cdot)$  est décroissante,
- (iii)  $\forall z \in \mathbb{R}$  et  $\forall \epsilon \in ]0, 1]$ ,  $0 \leq \tilde{\beta}_\epsilon(z) \leq 1$ ,
- (iv)  $\forall \epsilon \in ]0, 1]$ ,  $\lim_{z \rightarrow -\infty} \tilde{\beta}_\epsilon(z) = 1$  et  $\lim_{z \rightarrow +\infty} \tilde{\beta}_\epsilon(z) = 0$ .

La preuve de cette proposition provient directement des propriétés des fonctions de répartition associées à des fonctions de densité données. Afin de relier la fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon(\cdot)$  à la fonction  $F(\cdot)$ , le PMP est appliqué au problème défini par (21), (1) et (3). En adoptant la même démarche qu'en section (2.1), la fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon(\cdot)$  associée à la commande optimale est alors donnée par :

$$\tilde{\beta}_\epsilon(z) = \arg \min_{0 < y < 1} \left[ \Theta_\epsilon(y) = \frac{z}{\epsilon} y - F(y) \right] \quad (37)$$

Il est important de noter que  $y$  appartient à l'intervalle ouvert  $]0, 1[$ . En effet, la fonction  $F(\cdot)$  peut ne pas être définie en 0 et 1. Les conditions portant sur  $f_0(\cdot)$  pour lesquelles  $F(\cdot)$  est une pénalité seront énoncées par la suite. Afin d'obtenir l'expression de la fonction  $F(\cdot)$ , il est nécessaire de relier la fonction  $\Theta_\epsilon(\cdot)$  à la fonction de densité  $f_0(\cdot)$ . Nous avons choisi de rechercher  $\Theta_\epsilon(\cdot)$  sous la forme suivante :

$$\Theta_\epsilon(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{z}{\epsilon} - s \right) q_y(s) f_0(s) ds = \frac{z}{\epsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} q_y(s) f_0(s) ds - \int_{-\infty}^{+\infty} s q_y(s) f_0(s) ds \quad (38)$$

où la fonction  $q_y(\cdot)$  est une fonction de seuil définie comme suit :

$$q_y(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq s_y \\ 1 & \text{si } s > s_y \end{cases} \quad (39)$$

Ainsi, pour obtenir l'expression de la fonction  $F(\cdot)$ , il suffit de poser les égalités suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q_y(s) f_0(s) ds = y, \quad \forall y \in ]0, 1[ \quad (40)$$

et,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s q_y(s) f_0(s) ds = F(y), \quad \forall y \in ]0, 1[ \quad (41)$$

En utilisant l'expression de  $q_y(\cdot)$  donnée par (39), l'égalité (40) devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q_y(s) f_0(s) ds = \int_{s_y}^{+\infty} q_y(s) f_0(s) ds = 1 - \int_{-\infty}^{s_y} q_y(s) f_0(s) ds \quad (42)$$

d'où :

$$1 - \mathcal{F}_0(s_y) = y, \quad \forall y \in ]0, 1[ \quad (43)$$

Grâce aux propriétés de la fonction de répartition  $\mathcal{F}_0(\cdot)$ , i.e.

- $\mathcal{F}_0(\cdot)$  est continue et croissante sur  $\mathbb{R}$ ,
- $0 \leq \mathcal{F}_0(s_y) \leq 1, \forall s_y \in \mathbb{R}$ ,
- $\lim_{s_y \rightarrow -\infty} \mathcal{F}_0(s_y) = 0$  et  $\lim_{s_y \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_0(s_y) = 1$ .

L'équation (43) possède au moins une solution  $s_y$  quel que soit  $y$  dans  $]0, 1[$ . De plus, l'intégrale (41) vérifie :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} s q_y(s) f_0(s) ds \right| = \left| \int_{s_y}^{+\infty} s f_0(s) ds \right| \leq \int_{s_y}^{+\infty} |s| f_0(s) ds \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |s| f_0(s) ds \quad (44)$$

Pour que la dernière intégrale soit définie, il suffit que :

$$|s| f_0(s) \leq \frac{k}{|s|^\gamma}, \quad \gamma > 1 \text{ et } k > 0 \text{ quand } |s| \rightarrow +\infty \quad (45)$$

ce qui implique que :

$$f_0(s) \leq \frac{k}{|s|^\alpha}, \quad \alpha > 2 \text{ et } k > 0 \text{ quand } |s| \rightarrow +\infty \quad (46)$$

Sous cette condition, et en utilisant l'égalité (41), il vient :

$$|F(y)| < +\infty, \quad \forall y \in ]0, 1[ \quad (47)$$

ce qui donne immédiatement :

$$\lim_{y \rightarrow 0} |F(y)| < +\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 1} |F(y)| < +\infty \quad (48)$$

Tout ceci permet d'énoncer la condition nécessaire suivante :

**Proposition 3.6** *À partir d'une fonction de densité  $f_0(\cdot)$  positive, vérifiant (46), il est possible d'obtenir une fonction de pénalité  $F(\cdot)$ .*

Ceci est un résultat important car il permet de générer une infinité de fonctions de pénalité uniquement à partir de la connaissance de fonctions de densité satisfaisant la propriété (46). La fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon(\cdot)$  construite à partir de la convolution entre  $\tilde{\beta}(\cdot)$  et la fonction de densité  $f_0(\cdot)$  satisfaisant (46) vérifie une propriété très intéressante qui est présentée maintenant.

**Proposition 3.7** *Toute fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon(z) = (\tilde{\beta} \star f_0)\left(\frac{z}{\epsilon}\right)$ ,  $\epsilon \in ]0, 1[$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , avec  $f_0(\cdot)$  vérifiant la propriété (46) converge dans  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vers la fonction  $\tilde{\beta}(\cdot)$ .*

**Preuve :** En écrivant la norme  $L^2$  de la différence entre  $\tilde{\beta}_\epsilon(z)$  et  $\tilde{\beta}(z)$ , il vient :

$$\|\tilde{\beta}_\epsilon(z) - \tilde{\beta}(z)\|_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{\beta}_\epsilon(z) - \tilde{\beta}(z)]^2 dz \quad (49)$$

En utilisant la relation (36), l'expression de cette norme devient :

$$\|\tilde{\beta}_\epsilon(z) - \tilde{\beta}(z)\|_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - \mathcal{F}_0\left(\frac{z}{\epsilon}\right) - \tilde{\beta}(z)\right]^2 dz \quad (50)$$

D'après la définition de la fonction  $\tilde{\beta}(\cdot)$ , voir relation (12) avec  $\rho(t) = z$ , l'intégrale précédente peut se décomposer de la façon suivante :

$$\|\tilde{\beta}_\epsilon(z) - \tilde{\beta}(z)\|_2 = \int_{-\infty}^0 \left[\mathcal{F}_0\left(\frac{z}{\epsilon}\right)\right]^2 dz + \int_0^{+\infty} \left[1 - \mathcal{F}_0\left(\frac{z}{\epsilon}\right)\right]^2 dz \quad (51)$$

En procédant au changement de variable  $w = z/\epsilon$ , il vient :

$$\|\tilde{\beta}_\epsilon(w) - \tilde{\beta}(w)\|_2 = \epsilon \left\{ \int_{-\infty}^0 [\mathcal{F}_0(w)]^2 dw + \int_0^{+\infty} [1 - \mathcal{F}_0(w)]^2 dw \right\} \quad (52)$$

Puisque  $f_0(\cdot)$  vérifie la propriété (46), il est alors possible d'écrire :

$$\left| \int_{-\infty}^w f_0(s) ds \right| \leq \left| \int_{-\infty}^w \frac{k}{|s|^\alpha} ds \right| \quad (53)$$

En considérant  $w$  strictement négatif, il vient :

$$|\mathcal{F}_0(w)| \leq \left| \frac{k}{1-\alpha} \frac{1}{w^{\alpha-1}} \right| \Rightarrow \mathcal{F}_0(w)^2 \leq \left( \frac{k}{1-\alpha} \right)^2 \frac{1}{w^{2(\alpha-1)}} \quad (54)$$

De ce fait :

$$\int_{-\infty}^0 \mathcal{F}_0(w)^2 dw \leq \int_{-\infty}^0 \left( \frac{k}{1-\alpha} \right)^2 \frac{1}{w^{2(\alpha-1)}} dw < +\infty \quad (55)$$

puisque  $\alpha$  est strictement supérieur à 2, voir (46). En ce qui concerne la seconde intégrale de (52), le terme  $1 - \mathcal{F}_0(w)$  est donné par :

$$1 - \mathcal{F}_0(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(s) ds + \int_{-\infty}^w f_0(s) ds = \int_w^{+\infty} f_0(s) ds \quad (56)$$

Or, d'après la propriété (46), en considérant  $w$  strictement positif, cette dernière intégrale peut être majorée de la façon suivante :

$$1 - \mathcal{F}_0(w) = \int_w^{+\infty} f_0(s) ds \leq \int_w^{+\infty} \frac{k}{s^\alpha} ds = \frac{k}{1-\alpha} \frac{1}{w^{\alpha-1}} \quad (57)$$

d'où :

$$[1 - \mathcal{F}_0(w)]^2 \leq \left( \frac{k}{1-\alpha} \right)^2 \frac{1}{w^{2(\alpha-1)}} \quad (58)$$

Finalement, il est possible de déduire que :

$$\int_0^{+\infty} [1 - \mathcal{F}_0(w)]^2 dw \leq \int_0^{+\infty} \left( \frac{k}{1-\alpha} \right)^2 \frac{1}{w^{2(\alpha-1)}} dw \leq +\infty \quad (59)$$

puisque  $\alpha$  est strictement supérieur à 2, voir (46). Tout ceci permet de montrer que les deux intégrales de (52) sont bornées. Il vient donc immédiatement :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\tilde{\beta}_\epsilon(w) - \tilde{\beta}(w)\|_2 = 0, \quad \forall w \in \mathbb{R} \quad (60)$$

□

Deux exemples sont à présent développés dans le but de vérifier les résultats précédents. A partir de deux fonctions de densité différentes, les fonctions de pénalité associées seront obtenues en utilisant l'approche de génération proposée ci-dessus.

**Exemple 1 :** Soit la fonction de densité  $f_0^2(\cdot)$  suivante :

$$f_0^2(s) = \frac{\exp(s)}{(1 + \exp(s))^2} \quad (61)$$

$f_0^2(\cdot)$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$  et vérifie la condition (46), la proposition (3.6) permet donc d'affirmer qu'il existe une fonction de pénalité  $F^2(\cdot)$  associée. La fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon^2(\cdot)$  est donnée par :

$$\tilde{\beta}_\epsilon^2(z) = (\tilde{\beta} \star f_0^2) \left( \frac{z}{\epsilon} \right) = \int_{\frac{z}{\epsilon}}^{+\infty} f_0^2(s) ds = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{z}{\epsilon}\right)} \quad (62)$$

Les fonctions  $f_0^2(\cdot)$  et  $\tilde{\beta}_\epsilon^2(\cdot)$  avec  $\epsilon = 1$  sont représentées en figure (3).

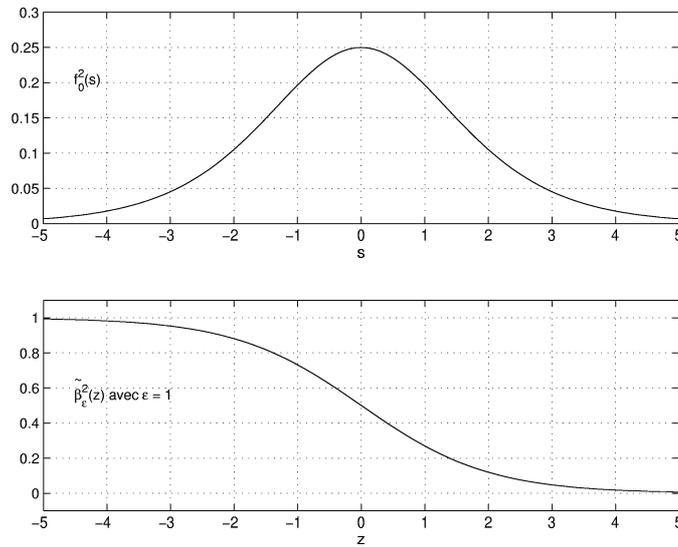


FIG. 3 – Représentation graphique des fonctions  $f_0^2(\cdot)$  et  $\tilde{\beta}_\epsilon^2(\cdot)$  avec  $\epsilon = 1$ .

De plus, la fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon^2(\cdot)$  est donnée par :

$$\tilde{\beta}_\epsilon^2(z) = \min_{0 < y < 1} \Theta_\epsilon^2(y) = \frac{z}{\epsilon} y - F^2(y) \quad (63)$$

où la fonction  $\Theta_\epsilon^2(\cdot)$  peut s'écrire de la façon suivante :

$$\Theta_\epsilon^2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{z}{\epsilon} - s \right) q_y^2(s) f_0^2(s) ds = \frac{z}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} q_y^2(s) f_0^2(s) ds - \int_{-\infty}^{\infty} s q_y^2(s) f_0^2(s) ds \quad (64)$$

avec :

$$q_y^2(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq s_y^2 \\ 1 & \text{si } s > s_y^2 \end{cases} \quad (65)$$

En résolvant l'équation suivante par rapport à  $s_y^2$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_y^2(s) f_0^2(s) ds = \int_{s_y^2}^{\infty} f_0^2(s) ds = y, \quad \forall y \in ]0, 1[ \quad (66)$$

il vient :

$$s_y^2 = \log\left(\frac{1-y}{y}\right), \quad \forall y \in ]0, 1[ \quad (67)$$

De plus,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} s q_y^2(s) f_0^2(s) ds &= \int_{s_y^2}^{\infty} s q_y^2(s) f_0^2(s) ds \\ &= \frac{\log(1 + \exp(s_y^2)) + \log(1 + \exp(s_y^2)) \exp(s_y^2) - s_y^2 \exp(s_y^2)}{(1 + \exp(s_y^2))} \end{aligned} \quad (68)$$

et en remplaçant  $s_y^2$  par sa valeur en fonction de  $y$  donnée par (67), il vient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} s q_y^2(s) f_0^2(s) ds = F^2(y) = -y \log(y) - (1-y) \log(1-y), \quad \forall y \in ]0, 1[ \quad (69)$$

La fonction  $F^2(\cdot)$  vérifie bien les propriétés d'une fonction de pénalité, à savoir :

$$\lim_{y \rightarrow 0} |F^2(y)| = \lim_{y \rightarrow 1} |F^2(y)| = 0 < +\infty \quad (70)$$

On peut donc prolonger  $F^2(\cdot)$  par continuité et écrire :

$$F^2(y) = \begin{cases} -y \log(y) - (1-y) \log(1-y) & \text{si } y \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{si } y = 0 \text{ ou } y = 1 \end{cases} \quad (71)$$

Ainsi, la commande optimale  $u^*(\cdot)$  associée au problème défini par (1), (3) et la fonction objectif suivante :

$$\begin{aligned} J_\epsilon^2 &= \int_{t_0}^{t_1} \{ \|u(t)\| - \epsilon F^2(\|u(t)\|) \} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} h^2(u(t), \epsilon) dt \end{aligned} \quad (72)$$

est donnée par :

$$u_\epsilon^*(t) = -\beta_\epsilon^2(t) \frac{g(x(t))^T \lambda(t)}{\|g(x(t))^T \lambda(t)\|}, \quad \text{si } g(x(t))^T \lambda(t) \neq 0 \quad (73)$$

où :

$$\beta_\epsilon^2(t) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\rho(t)}{\epsilon}\right)} \quad (74)$$

avec  $\rho(t)$  donnée par (10). D'un autre côté,  $u_\epsilon^*(t)$  doit uniquement vérifier la relation suivante :

$$\|u_\epsilon^*(t)\| = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} \quad (75)$$

lorsque le vecteur  $g(x(t))^T \lambda(t)$  est nul.

La fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon^2(\cdot)$  est appelée sigmoïde d'ordre  $\epsilon$  [25]. Elle présente des propriétés très intéressantes car elle est de classe  $C^\infty$ . Néanmoins, la fonction  $u^*(\cdot)$  n'est pas continue aux instants  $t$  tels que  $g(x(t))^T \lambda(t) = 0$ . De plus, comme la fonction  $h^2(\cdot, \epsilon)$  n'est pas strictement convexe pour  $\epsilon$  dans  $]0, 1[$ , la commande  $u^*(\cdot)$  ne peut être déterminée de façon unique, cf. [20] et la relation (75). La norme  $L^2$  de la différence entre  $\tilde{\beta}_\epsilon^2(z)$  et  $\tilde{\beta}(z)$  est :

$$\|\tilde{\beta}_\epsilon^2(z) - \tilde{\beta}(z)\|_2 = \epsilon (2 \log(2) - 1) \quad (76)$$

cela implique que la fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon^2(\cdot)$  converge dans  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vers la fonction  $\tilde{\beta}(\cdot)$  quand  $\epsilon$  tend vers 0. Ceci est bien en accord avec la proposition 3.7 puisque la fonction  $f_0^2(\cdot)$  vérifie la propriété (46). En ce qui concerne le processus de continuation, puisque  $F^2(y) \geq 0$  pour  $y$  dans  $]0, 1[$ , les propositions 3.1 et 3.2 peuvent être appliquées pour montrer la convergence de la suite  $J_{\epsilon_k}^2(u_{\epsilon_k}^*)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , vers  $J(u^*)$ . Par la suite, cette approche sera qualifiée d'approche par pénalités logarithmiques en référence à l'expression de la fonction  $F^2(\cdot)$ .

**Exemple 2 :** Cet exemple permet de déterminer la fonction de densité  $f_0^1(\cdot)$  associée à la fonction de pénalité quadratique  $F^1(\cdot)$ . En effet, en prenant :

$$f_0^1(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } |s| > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } |s| \leq 1 \end{cases} \quad (77)$$

il vient :

$$\tilde{\beta}_\epsilon^1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\beta}\left(\frac{z}{\epsilon} - s\right) f_0^1(s) ds = \begin{cases} 1 & \text{si } z \leq -\epsilon \\ \frac{1}{2} - \frac{z}{2\epsilon} & \text{si } |z| \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } z \geq \epsilon \end{cases} \quad (78)$$

En adoptant la même démarche que pour l'exemple précédent, (les calculs sont développés en annexe C.2), on retrouve bien la fonction  $F^1(\cdot)$  (30). Les fonctions  $f_0^1(\cdot)$  et  $\tilde{\beta}_\epsilon^1(\cdot)$  avec  $\epsilon = 1$  sont représentées en figure (4).

Le lecteur désireux de connaître d'autres exemples de fonctions de pénalité générées par cette approche peut se référer à [4].

### 3.2.3 Retour à l'exemple illustratif de la section 2.3

Dans un premier temps, l'approche par pénalités quadratiques sera analysée après quoi nous présenterons l'approche par pénalités logarithmiques. L'approche par pénalités quadratiques est associée à la fonction objectif suivante :

$$J_\epsilon^1 = \int_0^2 [ |u(t)| - \epsilon |u(t)|(1 - |u(t)|) ] dt \quad (79)$$

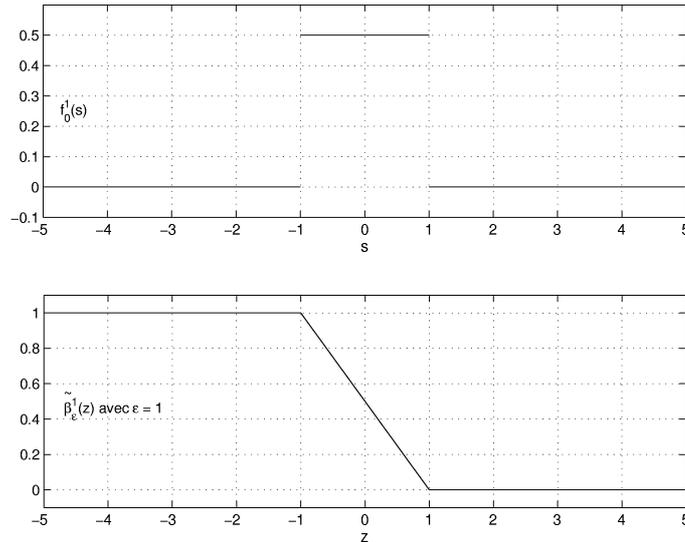


FIG. 4 – Représentation graphique des fonctions  $f_0^1(\cdot)$  et  $\tilde{\beta}_\epsilon^1(\cdot)$  avec  $\epsilon = 1$ .

La relation (16) fournit la commande optimale  $u^*(\cdot)$ , où  $\beta(t) = \beta^1(t)$  est donnée par (33) avec comme fonction de commutation  $\rho(t) = 1 - |\lambda(t)|$ .

En ce qui concerne l'approche par pénalités logarithmiques, la fonction objectif associée est :

$$J_\epsilon^2 = \int_0^2 \{ |u(t)| - \epsilon [ -|u(t)| \log(|u(t)|) - (1 - |u(t)|) \log(1 - |u(t)|) ] \} dt \quad (80)$$

La commande optimale est alors donnée par les relations (73), (74) et (75) avec  $\rho(t) = 1 - |\lambda(t)|$ .

La procédure par continuation peut alors être appliquée pour les deux approches. La première étape consiste à résoudre les deux problèmes avec  $\epsilon = 1$ . Les fonctions de tir sont obtenues en remplaçant  $\lambda(t)$  par son expression en fonction de  $z$  dans les relations donnant la commande optimale, i.e. (16) et (33) ou (73), (74) et (75). Elles peuvent s'écrire formellement de la façon suivante :

$$\Phi^i(z) = \tilde{x}_z^i(2) - \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad z \in \mathbb{R} \quad (81)$$

où  $\tilde{x}_z^i(\cdot)$ ,  $i = 1, 2$  sont les trajectoires d'état obtenues après intégration de l'équation (13) à partir de  $x(0)$  pour une valeur donnée du paramètre  $z$ . Les fonctions de tir  $\Phi^1(\cdot)$  et  $\Phi^2(\cdot)$  associées aux critères (79) et (80) sont représentées en figure 5.

A la vue de ces deux courbes, une première remarque peut être formulée. La fonction  $\Phi^1(\cdot)$  est continue en  $z$  sur  $\mathbb{R}$  alors que la fonction  $\Phi^2(\cdot)$  présente une discontinuité pour  $z = 0$ . La racine de la fonction  $\Phi^1(\cdot)$  est  $z_1^* = -0.2758$  alors que  $\Phi^2(z) = 0$  pour  $z = z_2^* = -0.32$ . Les bassins d'attraction de ces deux racines (déterminés numériquement) sont :

$$\mathbb{C}_{z_1^*} = [-2.0, 0.8] \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_{z_2^*} = [-24.2, 1.8] \setminus \{0\} \quad (82)$$

On constate que le bassin d'attraction de  $z_2^*$  est beaucoup plus grand que celui de  $z_1^*$  qui lui même est plus grand que le bassin  $\mathbb{C}$  de  $z^*$  donné par (20). Le fait que  $\Phi^2(\cdot)$  ne soit pas continue en zéro

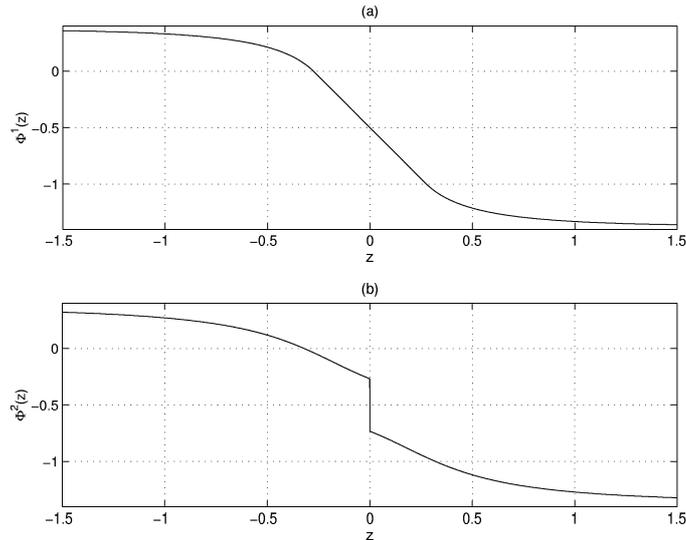


FIG. 5 – Exemple simple : représentation graphique des fonctions de tir  $\Phi^1(\cdot)$  (figure (a)) et  $\Phi^2(\cdot)$  (figure (b)) avec  $\epsilon = 1$ .

exclut ce point du bassin d'attraction de  $z_2^*$ . Ainsi, ce dernier n'est pas connexe alors que celui de  $z_1^*$  l'est. Le choix d'un point initial pour la méthode Hybrid-Powell ne représente donc plus un obstacle majeur surtout dans le cas des pénalités logarithmiques. Nous pouvons maintenant appliquer la procédure de continuation à partir des solutions associées à  $\epsilon = 1$ . Le déroulement de cette procédure est présenté dans le tableau 1. Ce dernier donne les racines  $z_1^{*k}$  et  $z_2^{*k}$  associées à  $\epsilon_k$  ainsi que l'écart absolu entre  $z_1^{*k}$  et  $z^*$  et entre  $z_2^{*k}$  et  $z^*$ , où  $z^* = -2 \exp(-2) \simeq -0.2707$ .

TAB. 1 – Résultats de la procédure de continuation pour les approches par pénalités quadratiques et par pénalités logarithmiques.

$\epsilon_k$	pénalités quadratiques		pénalités logarithmiques	
	$z_1^{*k}$	$ z_1^{*k} - z^* $	$z_2^{*k}$	$ z_2^{*k} - z^* $
1	-0.27582	$5.14 \cdot 10^{-3}$	-0.32004	$4.93 \cdot 10^{-2}$
1/2	-0.27067	$4.40 \cdot 10^{-7}$	-0.28586	$1.51 \cdot 10^{-2}$
1/3	-0.27067	$4.32 \cdot 10^{-7}$	-0.27656	$5.89 \cdot 10^{-3}$
1/4	-0.27067	$4.28 \cdot 10^{-7}$	-0.27312	$2.45 \cdot 10^{-3}$
1/5	-0.27067	$1.08 \cdot 10^{-7}$	-0.27172	$1.05 \cdot 10^{-3}$
1/6	-0.27067	$1.17 \cdot 10^{-7}$	-0.27113	$4.55 \cdot 10^{-4}$
1/7	-0.27067	$1.22 \cdot 10^{-7}$	-0.27087	$1.99 \cdot 10^{-4}$
1/8	-0.27067	$1.22 \cdot 10^{-7}$	-0.27076	$8.75 \cdot 10^{-5}$
1/9	-0.27067	$1.28 \cdot 10^{-7}$	-0.27071	$3.86 \cdot 10^{-5}$
1/10	-0.27067	$1.58 \cdot 10^{-7}$	-0.27069	$1.71 \cdot 10^{-5}$

On constate que les deux approches par fonctions de pénalité conduisent à la convergence des racines  $z_{i=1,2}^{*k}$  vers  $z^*$ . L'approche par pénalités quadratiques converge plus rapidement que

l'approche par pénalités logarithmiques comme on peut le constater en comparant les écarts absolus des colonnes 3 et 5 du tableau 1. Ceci peut s'expliquer par le fait que la fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon^1(\cdot)$  converge plus rapidement vers  $\tilde{\beta}(\cdot)$  que la fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon^2(\cdot)$  dans  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  (comparaison des normes  $L^2$  données par (34) et (76)). Néanmoins, cette rapidité de convergence importe peu. En effet, la principale difficulté étant l'obtention d'une solution pour  $\epsilon = 1$ , l'approche par pénalités logarithmiques peut être considérée comme beaucoup plus efficace que la méthode classique utilisant des pénalités quadratiques.

### 3.2.4 Conclusion

Nous avons vu qu'il était possible de générer des fonctions de pénalité à partir de fonctions de densité ayant les propriétés énoncées par la proposition 3.6. L'ordre de régularité des fonctions  $\tilde{\beta}_\epsilon^i(\cdot)$  dépend de l'ordre de régularité des fonctions de densité  $f_0^i(\cdot)$  associées. Ainsi, pour l'exemple 1, la fonction de densité  $f_0^2(\cdot)$  étant de classe  $C^\infty$ , la fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon^2(\cdot)$  est aussi de classe  $C^\infty$ . En ce qui concerne l'exemple 2,  $f_0^1(\cdot)$  est affine par morceaux, donc non dérivable, ce qui implique que  $\tilde{\beta}_\epsilon^1(\cdot)$  est continue et non dérivable, mais ces propriétés ne s'étendent pas à la commande optimale  $u^*(\cdot)$ . Ainsi, malgré le fait que  $f_0^2(\cdot)$  soit de classe  $C^\infty$ , la commande optimale associée n'est pas continue pour les instants  $t$  où le vecteur  $g(x(t))^T \lambda(t)$  est nul. Néanmoins, d'un point de vue numérique, l'utilisation de fonctions de pénalité permet d'obtenir d'excellents résultats en termes de convergence de la méthode de tir comme montré dans la section 3.2.3.

## 3.3 Utilisation des barrières logarithmiques pour la résolution de problèmes de commande optimale

Le succès que connaissent les barrières logarithmiques en programmation mathématique nous a incité à les utiliser dans le cadre de la commande optimale. En effet, de nombreux travaux, voir par exemple [18], [23], [29], portent sur l'utilisation de barrières logarithmiques dans des méthodes de points intérieurs pour traiter des problèmes de minimisation sous contraintes. Ces méthodes sont très utilisées dans le cadre de la programmation linéaire ou quadratique. Dans ce contexte, des théorèmes de convergence ont été énoncés [29]. L'idée est ici d'étendre les principes de la dimension finie au cas des problèmes de commande optimale.

### 3.3.1 Formulation du problème

Par définition, les commandes "bang-bang" prennent leurs valeurs aux bornes de leur ensemble de définition. L'idée va donc consister à pénaliser<sup>2</sup> fortement la fonction objectif lorsque la commande atteint ses bornes. Ainsi, pour le problème défini par (1), (2) et (3), il faut pénaliser la fonction objectif (2), pour éviter que  $\|u(t)\|$  ne prenne les valeurs 0 et 1, de la manière

<sup>2</sup>Ce terme est un peu ambigu dans le contexte des barrières.

suivante :

$$J_\epsilon^3 = \int_{t_0}^{t_1} \{ \|u(t)\| - \epsilon [\log(\|u(t)\|) + \log(1 - \|u(t)\|)] \} dt = \int_{t_0}^{t_1} h^3(u(t), \epsilon) dt \quad (83)$$

La fonction  $F^3(w) = \log(w) + \log(1 - w)$  vérifie les propriétés suivantes :

- (i)  $F(w) \leq 0, \forall w \in ]0, 1[$ ,
- (ii)  $\lim_{w \rightarrow 0} F^3(w) = \lim_{w \rightarrow 1} F^3(w) = -\infty$ , i.e.  $F^3(\cdot)$  est une barrière.

La contrainte (3) n'a plus lieu d'être car l'ensemble de définition de la fonction  $F^3(\cdot)$  est précisément l'intervalle ouvert  $]0, 1[$ . La propriété (i) précédente permet l'application des propositions 3.3 et 3.4 et conduit à la convergence de la suite  $J_{\epsilon_k}^3(u_{\epsilon_k}^*)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , vers  $J(u^*)$ . La commande optimale associée au critère (83) est donnée par :

$$u_\epsilon^*(t) = -\beta_\epsilon^3(t) \frac{g(x(t))^T \lambda(t)}{\|g(x(t))^T \lambda(t)\|}, \quad \text{si } g(x(t))^T \lambda(t) \neq 0 \quad (84)$$

avec

$$\beta_\epsilon^3(t) = \frac{2\epsilon}{\rho(t) + 2\epsilon + \sqrt{\rho(t)^2 + 4\epsilon^2}} \quad (85)$$

où  $\rho(t)$  est donnée par (10). Dans le cas où  $g(x(t))^T \lambda(t) = 0$ , la commande  $u_\epsilon^*(t)$  doit seulement satisfaire une condition portant sur sa norme, i.e. :

$$\|u_\epsilon^*(t)\| = \frac{2\epsilon}{1 + 2\epsilon + \sqrt{1 + 4\epsilon^2}} \quad (86)$$

En adoptant les mêmes notations que pour les sections précédentes, la norme  $L^2$  de la différence entre  $\tilde{\beta}_\epsilon^3(z)$  et  $\tilde{\beta}(z)$  devient :

$$\|\tilde{\beta}_\epsilon^3(z) - \tilde{\beta}(z)\|_2 = 4\epsilon(1 - \log(2)) \quad (87)$$

Cela montre une fois de plus que la fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon^3(\cdot)$  converge dans  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vers la fonction  $\tilde{\beta}(\cdot)$  quand  $\epsilon$  tend vers 0. Dans ce cas,  $\tilde{\beta}_\epsilon^3(\cdot)$  est de classe  $C^\infty$ , néanmoins,  $u_\epsilon^*(\cdot)$  n'est pas continue aux instants pour lesquels le vecteur  $g(x(t))^T \lambda(t)$  s'annule. Ceci provient du fait que la fonction  $h^3(\cdot, \epsilon)$  n'est pas strictement convexe, cf. [20], pour  $\epsilon$  dans  $]0, 1[$  et de ce fait la relation (86) ne détermine pas  $u_\epsilon^*(t)$  de façon unique. Ceci ne représente toutefois pas un véritable problème sur le plan numérique. Pour s'en convaincre, il suffit d'appliquer cette approche par barrières logarithmiques à l'exemple de la section 2.3, (voir section 3.3.3).

### 3.3.2 Liens avec les fonctions de densité

De la même façon qu'en section 3.2 pour les fonctions de pénalité, nous allons montrer ici la possibilité de générer des fonctions barrières à partir de fonctions de densité. En reprenant les relations (35) et (37), il vient :

$$\tilde{\beta}_\epsilon(z) = (\tilde{\beta} \star f_0) \left( \frac{z}{\epsilon} \right) = \arg \min_{0 < y < 1} \left[ \Theta_\epsilon(y) = \frac{z}{\epsilon} y - F(y) \right] \quad (88)$$

Or, la proposition 3.6 précise que si la fonction de densité vérifie la condition (46) alors la fonction  $F(\cdot)$  est une pénalité. Le but de cette section est donc montrer que si la fonction de densité  $f_0(\cdot)$  **ne vérifie pas la propriété (46) alors la fonction associée  $F(\cdot)$  est nécessairement une fonction barrière**. La solution  $y^*$  du problème précédent, vérifie la condition de stationnarité suivante :

$$\frac{z}{\epsilon} - \frac{dF}{dy}(y^*) = 0 \quad (89)$$

De plus, par définition de la fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon(\cdot)$ ,  $y^*$  est aussi égal à :

$$y^* = 1 - \mathcal{F}_0\left(\frac{z}{\epsilon}\right) \quad (90)$$

Donc, la fonction  $\mathcal{F}_0(\cdot)$  étant continue, analyser la fonction  $F(y^*)$  pour  $y^*$  dans  $]0,1[$  est strictement équivalent à analyser la fonction  $F\left(1 - \mathcal{F}_0\left(\frac{z}{\epsilon}\right)\right)$  pour  $z$  dans  $\mathbb{R}$  et quel que soit  $\epsilon$  dans  $]0,1[$ . Ainsi, l'application suivante :

$$w \longmapsto F(1 - \mathcal{F}_0(w)) \quad (91)$$

a pour dérivée :

$$\frac{d}{dw} F(1 - \mathcal{F}_0(w)) = -\frac{d\mathcal{F}_0}{dw}(w) \frac{dF}{d\mathcal{F}_0}(1 - \mathcal{F}_0(w)) \quad (92)$$

et grâce aux relations (89) et (90), on déduit :

$$\frac{d}{dw} F(1 - \mathcal{F}_0(w)) = -w f_0(w) \quad (93)$$

Donc, pour tout couple  $(w_1, w_2)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , il est possible d'écrire :

$$F(1 - \mathcal{F}_0(w_2)) - F(1 - \mathcal{F}_0(w_1)) = \int_{w_1}^{w_2} -w f_0(w) dw \quad (94)$$

Ainsi, en fixant  $w_1$  et en faisant tendre  $w_2$  vers l'infini et en considérant que  $f_0(\cdot)$  ne vérifie pas la propriété (46), on a :

$$\lim_{w_2 \rightarrow +\infty} \int_{w_1}^{w_2} -w f_0(w) dw = \lim_{y \rightarrow 0} [F(y) - F(1 - \mathcal{F}_0(w_1))] = -\infty \quad (95)$$

Il en est de même pour  $w_2$  fixé et  $w_1$  tendant vers l'infini :

$$\lim_{w_1 \rightarrow -\infty} \int_{w_1}^{w_2} -w f_0(w) dw = \lim_{y \rightarrow 1} [F(1 - \mathcal{F}_0(w_2)) - F(y)] = -\infty \quad (96)$$

Ces résultats ont été obtenus grâce à la positivité de la fonction  $f_0(\cdot)$  sur  $\mathbb{R}$ . Tout ceci permet finalement d'énoncer le théorème suivant.

**Théorème 3.1** *La fonction  $F(\cdot)$  est une fonction de pénalité si et seulement si la fonction de densité  $f_0(\cdot)$  vérifie la condition (46). Dans le cas contraire,  $F(\cdot)$  est une fonction barrière.*

Ce théorème est très important car il permet de montrer que quelle que soit la fonction de densité choisie, la technique de lissage proposée dans cette note permet de générer soit des fonctions de pénalité soit des fonctions barrières.

En ce qui concerne les barrières logarithmiques, il est possible de déterminer la fonction de densité  $f_0^3(\cdot)$  permettant d'obtenir la barrière  $F^3(\cdot)$ . Pour cela, il faut écrire la fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon^3(\cdot)$  sous la forme suivante :

$$\tilde{\beta}_\epsilon^3(z) = (\tilde{\beta} \star f_0^3) \left( \frac{z}{\epsilon} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\beta} \left( \frac{z}{\epsilon} - s \right) f_0^3(s) ds = \int_{\frac{z}{\epsilon}}^{+\infty} f_0^3(s) ds = 1 - \mathcal{F}_0^3 \left( \frac{z}{\epsilon} \right) \quad (97)$$

Ainsi, en utilisant l'expression de  $\tilde{\beta}_\epsilon^3 \left( \frac{z}{\epsilon} \right)$  donnée par (85) et en remplaçant  $z/\epsilon$  par  $s$ , il vient :

$$\mathcal{F}_0^3(s) = \frac{2}{\sqrt{s^2 + 4} + 2 - s} \quad (98)$$

La fonction de densité  $f_0^3(\cdot)$  est alors simplement la dérivée de  $\mathcal{F}_0^3(s)$  par rapport à  $s$ .

$$\frac{\mathcal{F}_0^3}{ds}(s) = f_0^3(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 4}(2 + \sqrt{s^2 + 4})} \quad (99)$$

Il est clair que la fonction  $f_0^3(\cdot)$  est une fonction de densité. De plus, cette dernière ne vérifie pas la condition (46), ce qui est bien en accord avec le théorème précédent.

### 3.3.3 Retour à l'exemple illustratif de la section 2.3

L'approche par barrières logarithmiques appliquée à l'exemple de la section 2.3 conduit à la minimisation de la fonction objectif suivante :

$$J_\epsilon^3 = \int_{t_0}^{t_1} \{ |u(t)| - \epsilon [\log(|u(t)|) + \log(1 - |u(t)|)] \} dt \quad (100)$$

sous les équations d'état et les conditions initiales et finales données par (13). Dans ce cas, la commande optimale est obtenue grâce aux relations (84), (85) et (86), avec comme fonction de commutation  $\rho(t) = 1 - |\lambda(t)|$ . La fonction de tir  $\Phi^3(\cdot)$  s'obtient en remplaçant  $\lambda(t)$  par son expression en fonction de  $z$  (18) dans les relations donnant la commande optimale, i.e. (84), (85) et (86). Elle peut s'écrire formellement de la façon suivante :

$$\Phi^3(z) = \tilde{x}_z^3(2) - \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad z \in \mathbb{R} \quad (101)$$

où  $\tilde{x}_z^3(\cdot)$ ,  $i = 1, 2$  est la trajectoire obtenue après intégration de l'équation (13) à partir de  $x(0)$  pour une valeur donnée du paramètre  $z$ . La représentation graphique de la fonction  $\Phi^3(\cdot)$  pour  $\epsilon = 1$  est donnée en figure 6.

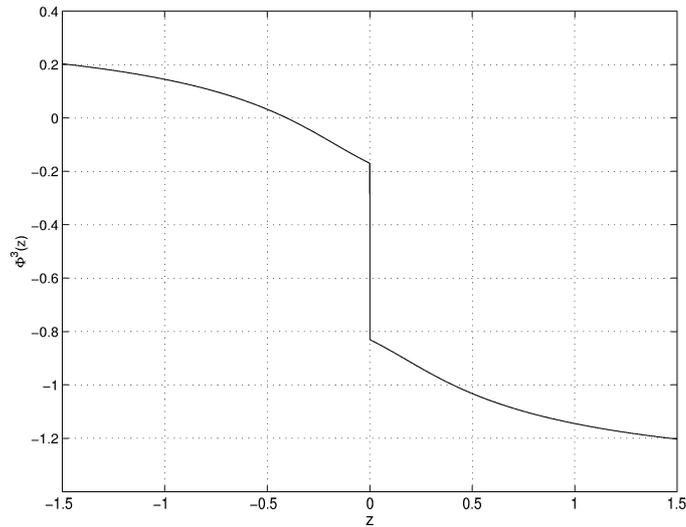


FIG. 6 – Exemple simple : représentation graphique de la fonction de tir  $\Phi^3(\cdot)$  avec  $\epsilon = 1$ .

La racine de la fonction  $\Phi^3(\cdot)$  trouvée par la méthode Hybrid-Powell pour  $\epsilon = 1$  est la suivante :  $z_3^* = -0.4049$ . Le résultat le plus important provient du bassin d'attraction de cette racine. En effet, ce dernier (déterminé numériquement) est :

$$\mathbb{C}_{z_3^*} = [-3490.0, 110.0] / \{0\} \quad (102)$$

Le point  $z = 0$  est exclu de ce bassin d'attraction car  $\Phi^3(\cdot)$  (voir figure 6), tout comme  $\Phi^2(\cdot)$  (voir figure 5), n'est pas continue en ce point. Donc, le choix d'un point initial pour la méthode Hybrid-Powell, avec  $\epsilon = 1$ , devient trivial dans le cas des barrières logarithmiques. Il reste à montrer la convergence de la procédure de continuation. Le déroulement de cette dernière est présenté dans le tableau 2. L'approche par barrières logarithmiques conduit à la convergence

TAB. 2 – Résultats de la procédure de continuation pour l'approche par barrières logarithmiques.

$\epsilon_k$	$z_3^{*k}$	$ z_3^{*k} - z^* $
1	-0.40494	$1.34 \cdot 10^{-1}$
1/2	-0.33126	$6.05 \cdot 10^{-2}$
1/3	-0.30832	$3.76 \cdot 10^{-2}$
1/4	-0.29756	$2.69 \cdot 10^{-2}$
1/5	-0.29143	$2.08 \cdot 10^{-2}$
1/6	-0.28752	$1.68 \cdot 10^{-2}$
1/7	-0.28483	$1.41 \cdot 10^{-2}$
1/8	-0.28286	$1.21 \cdot 10^{-2}$
1/9	-0.28137	$1.06 \cdot 10^{-2}$
1/10	-0.28019	$9.52 \cdot 10^{-3}$

des racines  $z_3^{*k}$  vers  $z^*$ , mais la vitesse de convergence associée est plus faible que celles des

approches par fonctions de pénalité. Ceci peut être vu en comparant les écarts absolus présentés en colonnes 3 et 5 du tableau 1 et en colonne 3 du tableau 2.

**Remarque 3.2** *Les pas du processus de continuation, i.e.  $\epsilon_{k+1} - \epsilon_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , peuvent être pris plus grands en valeur absolue pour les approches par pénalités ou barrières logarithmiques. En effet, ces dernières présentent des bassins d'attraction suffisamment larges permettant d'éviter des cas de divergence de la méthode de tir entre deux itérations successives. Ceci conduit à une accélération de la convergence de la suite  $\epsilon_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  d'où une obtention plus rapide de la solution du problème initial.*

En conclusion, les vitesses de convergence des procédures de continuation sont très fortement liées aux vitesses de convergence des fonctions  $\tilde{\beta}^1(\cdot)$ ,  $\tilde{\beta}^2(\cdot)$  et  $\tilde{\beta}^3(\cdot)$  vers  $\tilde{\beta}(\cdot)$ . En effet, en considérant les inégalités suivantes :

$$\|\tilde{\beta}_\epsilon^3(z) - \tilde{\beta}(z)\|_2 \leq \|\tilde{\beta}_\epsilon^2(z) - \tilde{\beta}(z)\|_2 \leq \|\tilde{\beta}_\epsilon^1(z) - \tilde{\beta}(z)\|_2 \quad (103)$$

on retrouve la relation entre les vitesses de convergence des différentes procédures de continuation. Mais la vitesse de convergence n'est pas le point le plus important car la principale difficulté consiste à trouver de façon la plus simple possible, i.e. choix du point initial, la racine de la fonction de tir à la première étape de la procédure de continuation, i.e.  $\epsilon = 1$ . Sur ce plan, il est clair que l'approche par barrières logarithmes est beaucoup plus efficace que les approches par fonctions de pénalité proposées en section 3.2.

## 4 Application aux transferts interplanétaires

### 4.1 Modélisation

Nous allons nous intéresser ici au mouvement d'une sonde dans le système solaire, en supposant que les forces d'attraction exercées sur la sonde par les différentes planètes peuvent être négligées devant l'attraction du Soleil. Nous nous plaçons donc dans le cadre d'un problème aux deux corps, c'est-à-dire que seules l'attraction du Soleil et la force de poussée du moteur sont prises en compte dans le bilan des forces exercées sur la sonde.

En utilisant les coordonnées cartésiennes dans un repère inertiel héliocentrique et en omettant la notation vectorielle, il vient :

$$\begin{bmatrix} \dot{r}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{m}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ -\mu \frac{r(t)}{\|r(t)\|^3} + \frac{T}{m(t)} \delta(t) U(t) \\ -\frac{T}{c} \delta(t) \end{bmatrix} \quad (104)$$

où  $r(t) = [r_x(t) \ r_y(t) \ r_z(t)]^T$  et  $v(t) = [v_x(t) \ v_y(t) \ v_z(t)]^T$  sont respectivement la position et la vitesse héliocentrique de la sonde à la date  $t$ .  $T$  désigne ici le module de poussée du moteur exprimé en Newton et  $m(\cdot)$  désigne la masse de la sonde.  $\delta(\cdot)$  représente, quant à lui, l'état du moteur, c'est-à-dire allumé ou éteint,  $\delta(\cdot)$  a pour valeur 1 si le moteur fonctionne et 0 dans le cas contraire. Enfin, le vecteur  $\vec{U}(\cdot)$  est un vecteur unitaire donnant la direction de poussée,  $\mu$  désigne la constante de gravitation du Soleil et  $c$  désigne la vitesse d'éjection du moteur.

Le critère d'optimisation est une combinaison linéaire convexe entre la durée du transfert et un critère proportionnel à la consommation du moteur, il s'écrit :

$$J = \alpha(t_1 - t_0) + (1 - \alpha) \int_{t_0}^{t_1} \delta(\tau) d\tau, \quad \alpha \in [0, 1] \quad (105)$$

Il est clair en effet que la consommation du moteur peut s'écrire :

$$\Delta m = m(t_0) - m(t_1) = \frac{T}{c} \int_{t_0}^{t_1} \delta(\tau) d\tau \quad (106)$$

Les conditions initiales et terminales dépendent quant à elles de la mission considérée. Elles prennent la forme générale suivante :

$$\psi_0(t_0, x(t_0)) = \begin{bmatrix} \psi_0^r(t_0, r(t_0)) \\ \psi_0^v(t_0, v(t_0)) \\ \psi_0^m(m(t_0)) \end{bmatrix} = 0 \quad (107)$$

et :

$$\psi_1(t_1, x(t_1)) = \begin{bmatrix} \psi_1^r(t_1, r(t_1)) \\ \psi_1^v(t_1, v(t_1)) \\ \psi_1^m(m(t_1)) \end{bmatrix} = 0 \quad (108)$$

où le vecteur d'état  $x(\cdot)$  s'écrit  $x(t) = [r(t)^T \ v(t)^T \ m(t)^T]^T$ .

**Remarque 4.1** *Les instants initiaux et finaux  $t_0$  et  $t_1$  ainsi que les masses  $m(t_0)$  et  $m(t_1)$  peuvent être libres ou bien fixés selon les problèmes à traiter.*

**Remarque 4.2** *Pour plus de précisions sur l'expression des conditions (107) et (108) on pourra se reporter à [3].*

## 4.2 Application du principe du maximum de Pontryagin

L'hamiltonien du problème défini ci-dessus s'écrit, cf. [7] ou [30] :

$$\begin{aligned} H(x(t), \delta(t), U(t), \lambda(t)) = & (1 - \alpha)\delta(t) + \lambda_r(t)^T v(t) - \frac{\mu}{\|r(t)\|^3} \lambda_v(t)^T r(t) \\ & + \frac{T}{m(t)} \delta(t) \lambda_v(t)^T U(t) - \frac{T}{c} \lambda_m(t) \delta(t) \end{aligned} \quad (109)$$

où  $\lambda_r(\cdot)$ ,  $\lambda_v(\cdot)$  et  $\lambda_m(\cdot)$  désignent les composantes de la fonction état adjoint  $\lambda(\cdot)$ . D'après le PMP, l'équation différentielle décrivant l'évolution dans le temps de l'état adjoint s'écrit :

$$\dot{\lambda}(t) = -\partial_x H(x(t), \delta(t), U(t), \lambda(t)) \quad (110)$$

ce qui conduit à :

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_r(t) \\ \dot{\lambda}_v(t) \\ \dot{\lambda}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \left[ \frac{I \cdot \lambda_v(t)}{\|r(t)\|^3} - \frac{3r(t)^T \lambda_v(t)}{\|r(t)\|^5} \right] r(t) \\ -\lambda_r(t) \\ \frac{\lambda_v(t)^T U(t)}{m(t)^2} T \delta(t) \end{bmatrix} \quad (111)$$

L'expression de la commande optimale s'obtient quant à elle par minimisation de l'hamiltonien, c'est-à-dire<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} (\delta^*(t), U^*(t)) &= \arg \min_{(\delta, U) \in U_{ad}} H(x(t), \delta, U, \lambda(t)) \\ &= \arg \min_{(\delta, U) \in U_{ad}} (1 - \alpha)\delta + \frac{T}{m(t)} U^T \lambda_v(t) \delta - \frac{T}{c} \lambda_m(t) \delta \end{aligned} \quad (112)$$

Pour ce qui est de la direction de poussée, si la fonction  $\lambda_v(\cdot)$  ne s'annule pas sur l'intervalle de temps considéré alors la solution du problème précédent est donnée par :

$$U^*(t) = -\frac{\lambda_v(t)}{\|\lambda_v(t)\|}, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (113)$$

Par contre si  $\lambda_v(t) = 0$ , alors la direction de poussée est laissée libre, le vecteur  $U^*(t)$  doit simplement être unitaire quelque soit  $t$  dans l'intervalle  $[t_0, t_1]$ . Il reste à présent à déterminer l'expression de  $\delta^*(\cdot)$ . En substituant la valeur optimale de  $U^*(\cdot)$ , voir (113), dans le problème défini par (112), l'état optimal du moteur s'écrit :

$$\delta^*(t) = \arg \min_{\delta \in \{0;1\}} \left[ (1 - \alpha) - \frac{T}{m(t)} \|\lambda_v(t)\| - \frac{T}{c} \lambda_m(t) \right] \delta \quad (114)$$

et on obtient alors :

$$\delta^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho(t) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (115)$$

avec :

$$\rho(t) = (1 - \alpha) - T \left[ \frac{\|\lambda_v(t)\|}{m(t)} + \frac{\lambda_m(t)}{c} \right], \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (116)$$

Pour les instants où  $\lambda_v(t) = 0$ , l'état optimal du moteur est donné par :

$$\delta^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } (1 - \alpha) - \frac{T}{c} \lambda_m(t) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (117)$$

<sup>3</sup>La notation \* représentant le caractère optimal des états et des états adjoints a été omise afin d'alléger les écritures.

En résumé, si  $\lambda_v(t)$  est nul alors  $U^*(t)$  vérifie simplement la condition de norme unitaire et  $\delta^*(t)$  est donné par (117), sinon  $U^*(t)$  est donné par (113) et  $\delta^*(t)$  par (115). La commande optimale  $\delta^*(\cdot)$  est dite "bang-bang", car elle susceptible de commuter, i.e. changer de valeur, au cours du transfert. Notons que ces commandes optimales sont valables quelle que soit la valeur du paramètre  $\alpha$  du critère (105).

**Remarque 4.3** *Si on considère le critère d'optimisation (105) avec  $\alpha = 1$ , le problème de commande optimale est appelé problème en temps minimum. On peut montrer dans ce cas [6] que :*

$$\delta^*(t) = 1, \quad \text{presque partout sur } [t_0, t_1] \quad (118)$$

*Ainsi, pour un problème en temps minimum, le moteur doit toujours être allumé durant le transfert*

Pour terminer, le PMP définit les conditions initiales et terminales que doit vérifier l'état adjoint  $\lambda(\cdot)$ , dites conditions de transversalité, qui vont dépendre des conditions aux bouts (107) et (108). Il fournit également des conditions supplémentaires portant sur l'hamiltonien dans le cas où  $t_0$  ou  $t_1$  sont libres (voir [3]).

### 4.3 Quelques hypothèses

Pour appliquer les méthodes de résolution de la section 3 aux problèmes de transferts interplanétaires, il est nécessaire de procéder à quelques modifications. Comme il a été vu dans le paragraphe précédent, des commutations sur la commande, i.e. sur l'état du moteur  $\delta(\cdot)$ , apparaissent lorsque le paramètre  $\alpha$  de la fonction objectif donnée par (105) est différent de 1. Pour la suite de cette section, le paramètre  $\alpha$  est pris égal à 0. De ce fait, seuls des problèmes de consommation minimum sont résolus. La fonction objectif associée à ces problèmes est la suivante<sup>4</sup> :

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \delta(\tau) d\tau \quad (119)$$

Pour ce type de critère, il est impossible d'appliquer directement les méthodes de lissage et continuation précédentes car les hypothèses sur la fonction  $\delta(\cdot)$  sont trop restrictives. Pour relaxer ces contraintes, il suffit de considérer que  $\delta(t)$  peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle  $[0, 1]$  et non plus uniquement 0 ou 1. Ainsi, l'ensemble d'admissibilité des commandes devient :

$$U_{ad} = \{(\delta, U) \in L^2([t_0, t_1], \mathbb{R}) \times L^2([t_0, t_1], \mathbb{R})^3 \\ | \forall t \in [t_0, t_1], \delta(t) \in [0, 1], \|U(t)\| = 1\} \quad (120)$$

Cette relaxation peut être interprétée comme la possibilité de moduler l'amplitude de poussée. Ceci ne change en rien l'expression de la commande optimale  $\delta^*(\cdot)$  donnée par (115), (116) et (117) car l'hamiltonien (109) reste linéaire en  $\delta(t)$  et de ce fait  $\delta(t)$  est optimal en ces bornes,

<sup>4</sup>On supposera ici que la masse initiale est fixée. Des résultats équivalents sont obtenus quand la masse finale est fixée. La seule différence entre ces deux problèmes provient des conditions de transversalité en  $t_0$  et  $t_1$ .

i.e. 0 ou 1. D'autre part, bien que les équations (104) ne soient pas linéaires par rapport à la commande comme dans la formulation générale (1), les techniques de lissage développées en section 3 sont applicables et les propositions 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4 sont encore valides car elles ne dépendent pas de la forme de la dynamique du problème.

## 4.4 Méthodes de continuation-lissage

Cette section présente les divers critères et commandes optimales associées aux approches par pénalités quadratiques, pénalités logarithmiques et barrières logarithmiques. L'algorithme de continuation est ensuite présenté en définissant la suite  $\epsilon_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

### 4.4.1 Pénalités quadratiques

En reprenant la méthode de lissage proposée en section 3.2, la fonction objectif du problème défini par (119), (104) et par les diverses conditions initiales et finales condensées en (107) et (108), devient :

$$J_\epsilon^1 = \int_{t_0}^{t_1} \delta(t) - \epsilon \delta(t)(1 - \delta(t)) dt \quad (121)$$

En appliquant le PMP, il est aisé de montrer que la commande optimale  $U_\epsilon^*(\cdot)$  est égale à  $U^*(\cdot)$  donnée par (113) lorsque  $\lambda_v(t)$  est différent de 0. Lorsque  $\lambda_v(t)$  est nul,  $U_\epsilon^*(\cdot)$  est libre et doit simplement vérifier la condition sur la norme, i.e. pour tout  $t$  dans  $[t_0, t_1]$  alors  $\|U_\epsilon^*(t)\| = 1$ . Par contre, l'expression de  $\delta_\epsilon^*(\cdot)$  est la suivante :

$$\delta_\epsilon^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho(t) \leq -\epsilon \\ \frac{1}{2} - \frac{\rho(t)}{2\epsilon} & \text{si } |\rho(t)| \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } \rho(t) \geq \epsilon \end{cases}, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (122)$$

où la fonction de commutation  $\rho(\cdot)$  est donnée par (116).

### 4.4.2 Pénalités logarithmiques

Dans ce cas, la fonction objectif associée au problème perturbé s'écrit de la façon suivante :

$$J_\epsilon^2 = \int_{t_0}^{t_1} \delta(t) - \epsilon [-\delta(t) \log(\delta(t)) - (1 - \delta(t)) \log(1 - \delta(t))] dt \quad (123)$$

De la même façon qu'en section précédente, la commande optimale  $U_\epsilon^*(\cdot)$  est égale à  $U^*(\cdot)$  donnée par (113) lorsque  $\lambda_v(t)$  est différent de 0. Lorsque  $\lambda_v(t)$  est nul,  $U_\epsilon^*(\cdot)$  est libre et doit simplement vérifier la condition de norme unitaire. La commande  $\delta^*(\cdot)$ , quant à elle, a comme expression :

$$\delta_\epsilon^*(t) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\rho(t)}{\epsilon}\right)}, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (124)$$

où la fonction de commutation  $\rho(\cdot)$  est donnée par (116).

### 4.4.3 Barrières logarithmiques

Pour ce dernier cas, la méthode de lissage de la section 3.3 conduit à la fonction objectif suivante :

$$J_\epsilon^3 = \int_{t_0}^{t_1} \delta(t) - \epsilon [\log(\delta(t)) + \log(1 - \delta(t))] dt \quad (125)$$

En appliquant le PMP, il est aisé de montrer que  $U_\epsilon^*(\cdot)$  est égale à  $U^*(\cdot)$  donnée par (113) lorsque  $\lambda_v(t)$  est différent de 0, sinon  $U_\epsilon^*(\cdot)$  est libre et doit simplement vérifier la condition de norme unitaire. L'état optimal du moteur  $\delta_\epsilon^*(\cdot)$  s'écrit de la façon suivante :

$$\delta_\epsilon^*(t) = \frac{2\epsilon}{\rho(t) + 2\epsilon + \sqrt{\rho(t)^2 + 4\epsilon^2}}, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (126)$$

où la fonction de commutation  $\rho(\cdot)$  est donnée par (116).

### 4.4.4 Algorithme de continuation

L'algorithme de continuation est défini à partir des critères d'optimisation  $J_{\epsilon_k}^i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , issus de la suite  $\epsilon_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , des valeurs du paramètre  $\epsilon$ . Cette suite peut être construite de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_{n-1} > \epsilon_n \\ \epsilon_{k+1} = \epsilon_k - \Delta_\epsilon, \quad \Delta_\epsilon = 10^{-5} \\ \epsilon_1 = 10^{-1} \text{ et } \epsilon_n = 10^{-5}, \text{ avec } n = 10^4 \text{ pour cet exemple} \end{array} \right. \quad (127)$$

Pour les transferts interplanétaires, il est possible de débiter la procédure de continuation avec  $\epsilon_1$  égal à  $10^{-1}$ . Ceci ne change en rien la résolution du problème mais permet simplement de diminuer le nombre d'itérations. Ici, nous avons choisi de terminer l'algorithme de continuation après un nombre fini d'itérations, i.e. lorsque  $\epsilon_n$  est égal à  $10^{-5}$ . Ce faisant, la solution obtenue pour  $\epsilon_n$  permet d'initialiser la méthode Hybrid-Powell pour le problème initial, i.e. de critère (119). Si  $\epsilon_n$  est suffisamment petit, cette solution est une très bonne approximation de la solution du problème initial et, de ce fait, conduit à la convergence de la méthode Hybrid-Powell vers la solution désirée.

La procédure de continuation étant à présent totalement définie, il devient intéressant de montrer l'efficacité de cette approche sur deux exemples de transfert interplanétaire.

## 4.5 Exemples numériques

### 4.5.1 Exemple 1 : Trajectoire Terre-Vénus en consommation minimum

Cette section traite un exemple de transfert Terre-Vénus en consommation minimum avec comme date de départ  $t_0 = 7/10/2005$ , comme date d'arrivée à Vénus  $t_1 = 3/07/2008$  et avec

les données numériques suivantes :

$$m(t_0) = m_0 = 1500.0 \text{ kg}, \quad T = 0.33 \text{ N}, \quad c = 37278.0 \text{ ms}^{-1} \quad (128)$$

En initialisant l'agorithme Hybrid-Powell avec 100 points initiaux différents générés aléatoirement, aucun cas de convergence ne se produit lorsqu'on résout directement le problème initial. Si par contre, on applique les différentes techniques de lissage vue en section 3 en partant des mêmes 100 points initiaux avec  $\epsilon = \epsilon_1 = 10^{-1}$  on obtient des cas de convergence, soit vers la solution globale du problème notée  $s$  soit vers deux solutions locales  $s_1$  et  $s_2$ . Le tableau 3 résume les résultats obtenus.

TAB. 3 – Nombre de cas de convergence pour  $\epsilon = 10^{-1}$  et 100 points initiaux.

solution	$s$	$s_1$	$s_2$
problème initial	0	0	0
pénalités quadratiques	1	0	1
barrières logarithmiques	9	7	3
pénalités logarithmiques	5	1	2

Nous pouvons à présent appliquer l'algorithme de continuation dans le cas des barrières logarithmiques par exemple. La commande optimale  $\delta_\epsilon^*(\cdot)$  pour  $\epsilon_k$  valant  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  et  $10^{-5}$  sont présentées en figure 7.

La dernière solution, i.e.  $\epsilon_k = 10^{-5}$ , est très proche de la commande optimale du problème initial (dernier graphique de la figure 7). La trajectoire correspondant à la solution globale  $s$  du problème initial est présentée en figure 8 (les symboles \* indiquent les phases de poussée du moteur). La masse finale de la sonde est de 1290 kg, ce qui correspond à une consommation totale de 210 kg. La solution locale  $s_1$  (resp.  $s_2$ ) correspond à une consommation de 241 kg (resp. 465 kg), ce qui montre bien la nécessité de générer un nombre suffisamment grand de points initiaux pour la méthode Hybrid-Powell.

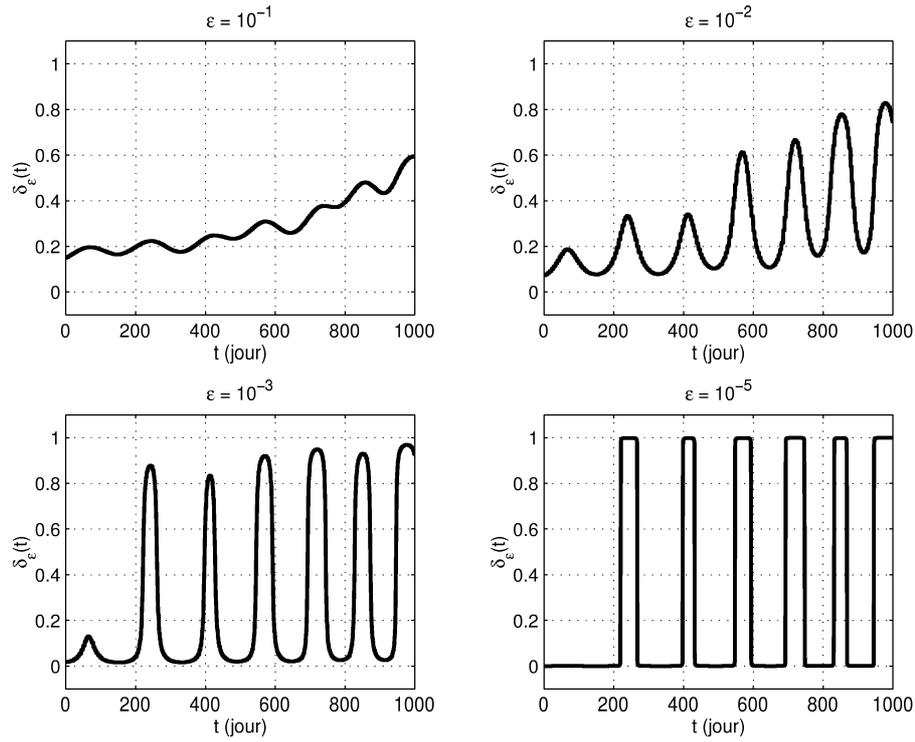


FIG. 7 – Transfert Terre-Vénus : état optimal du moteur pour  $\epsilon$  variant de  $10^{-1}$  à  $10^{-5}$ .

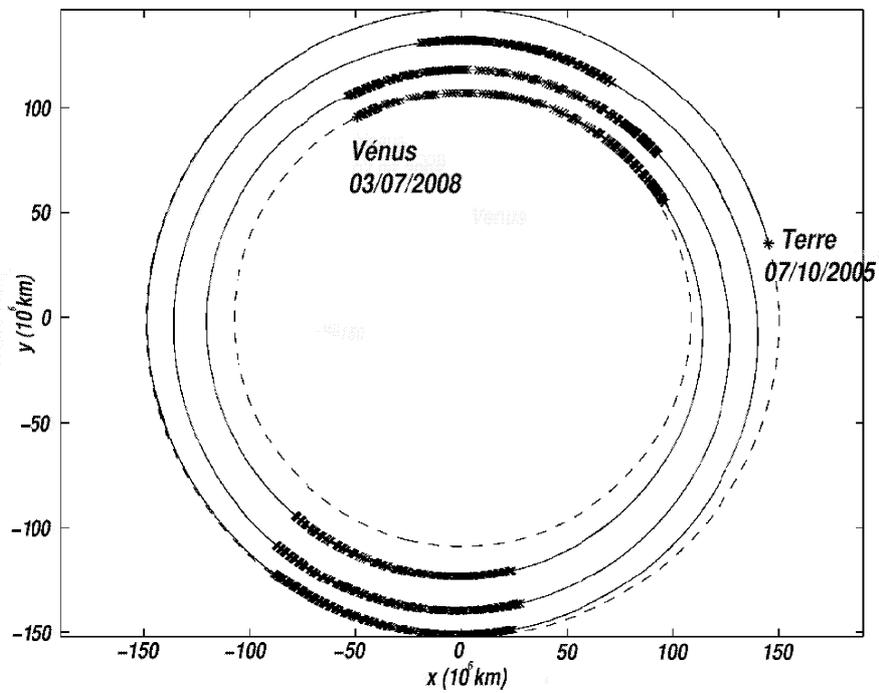


FIG. 8 – Transfert Terre-Vénus : solution globale en consommation minimum.

### 4.5.2 Exemple 2 : Trajectoire Terre-Jupiter en consommation minimum

Cette section porte sur un exemple de transfert Terre-Jupiter en consommation minimum. La date de départ est  $t_0 = 12/12/2008$  et la durée du voyage héliocentrique est laissée libre, ce qui signifie que l'instant terminal  $t_1$  doit être déterminé par le processus d'optimisation. Les caractéristiques du moteur sont identiques à celles utilisées dans le cadre de l'exemple précédent, voir section 4.5.1.

Ici, seule la méthode de continuation-lissage basée sur l'introduction de barrières logarithmiques est utilisée. En fixant  $\epsilon = \epsilon_1 = 10^{-1}$  et en initialisant la méthode Hybrid-Powell avec 100 points initiaux différents, 12 cas de convergence se produisent. Le tableau 4 résume les caractéristiques des solutions obtenues en termes de coût et de durée de transfert ainsi que le nombre de cas de convergence vers chacune des solutions. On obtient un nombre de cas de convergence semblable

TAB. 4 – Résultats pour le problème Terre-Jupiter avec  $\epsilon = 10^{-1}$ .

	nombre de cas de convergence	$m(t_0) - m(t_1)$ (kg)	$t_1 - t_0$ (jour)
$s_1$	7	580.0	1798
$s_2$	5	616.0	2182

pour les deux solutions, ce nombre dépendant fortement bien sûr du domaine de recherche sur lequel est effectué le tirage aléatoire des points initiaux. Dans ce cas précis, nous pouvons dire schématiquement, que les intersections entre ce domaine et les bassins d'attraction des solutions  $s_1$  et  $s_2$  sont de taille équivalente. D'autre part, la solution  $s_1$  présente un coût beaucoup plus faible (-36 kg) que celui de la solution  $s_2$ . Ainsi, pour le problème lissé, i.e. pour  $\epsilon = 10^{-1}$ , la solution  $s_1$  peut être considérée comme meilleure (en termes du critère d'optimisation considéré) que la solution  $s_2$ .

Nous pouvons appliquer à présent la procédure de continuation afin d'obtenir les solutions "bang-bang" associées aux deux solutions précédentes. Pour ce faire, nous utilisons le même algorithme de continuation que celui utilisé pour l'exemple de la section 4.5.1. Les caractéristiques des solutions "bang-bang" ainsi obtenues sont présentées en tableau 5.

TAB. 5 – Solutions "bang-bang" pour le problème Terre-Jupiter.

	$m(t_0) - m(t_1)$ (kg)	$t_1 - t_0$ (jour)
$s_1$	508.7	1965
$s_2$	494.8	2820

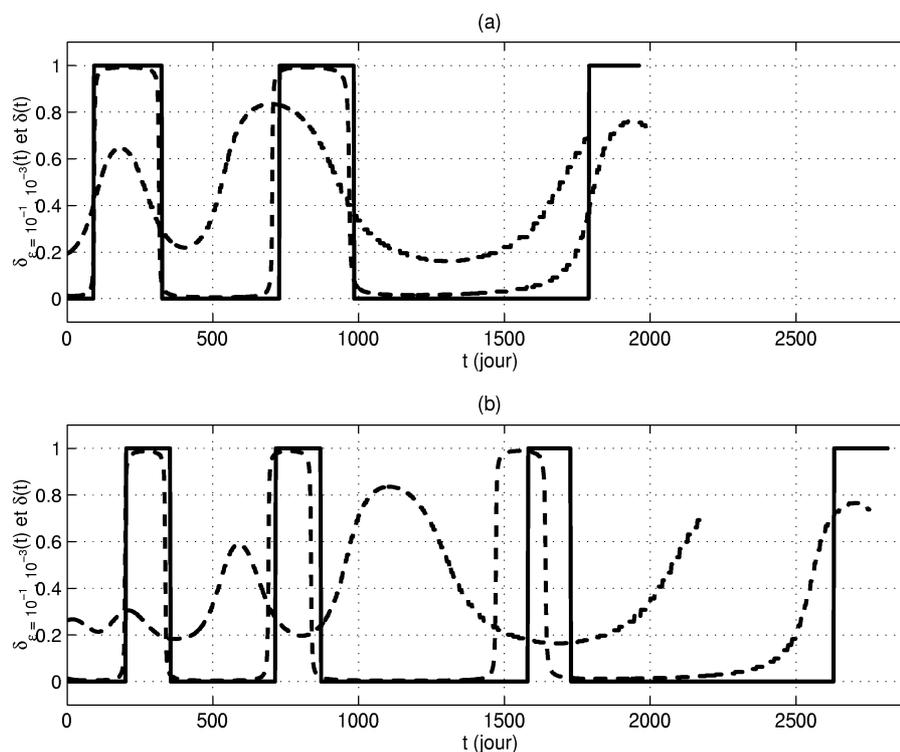


FIG. 9 – Commandes lissées et commandes "bang-bang" associées à  $s_1$  (a) et  $s_2$  (b).

Le résultat important est que la consommation associée à la solution  $s_2$  devient inférieure de 13.9 kg à celle relative à la solution  $s_1$ . Ceci peut être clairement retrouvé en analysant les commandes "bang-bang" représentées en trait plein en figures 9(a) et 9(b). Les courbes en pointillés représentent, quant à elles, les commandes optimales des problèmes lissés avec  $\epsilon = 10^{-1}$  et  $\epsilon = 10^{-3}$ .

La trajectoire correspondant à la solution  $s_1$  (respectivement  $s_2$ ) est présentée en figure 10 (respectivement en figure 11). La loi de poussée associée à  $s_1$  (respectivement  $s_2$ ) est composée de trois phases (respectivement quatre phases) de poussée et de dérive. Pour chacune des solutions, les premiers arcs de poussée sont localisés autour du périhélie<sup>5</sup> afin d'augmenter le plus efficacement possible le demi-grand axe de l'orbite. Une fois le demi-grand axe final atteint, une dernière phase de poussée permet d'ajuster la vitesse finale de la sonde dans l'optique de réaliser le rendez-vous avec Jupiter.

Cet exemple a donc permis de mettre l'accent sur la difficulté de comparaison des solutions dans ce contexte de continuation-lissage. En effet, seuls les coûts associés aux solutions "bang-bang" peuvent être comparés. Il est difficile de comparer directement les critères d'optimisation perturbés associés aux premières itérations de la procédure de continuation, lorsque le paramètre  $\epsilon$  n'est pas suffisamment proche de zéro.

<sup>5</sup>Point de l'orbite instantanée le plus proche du Soleil.

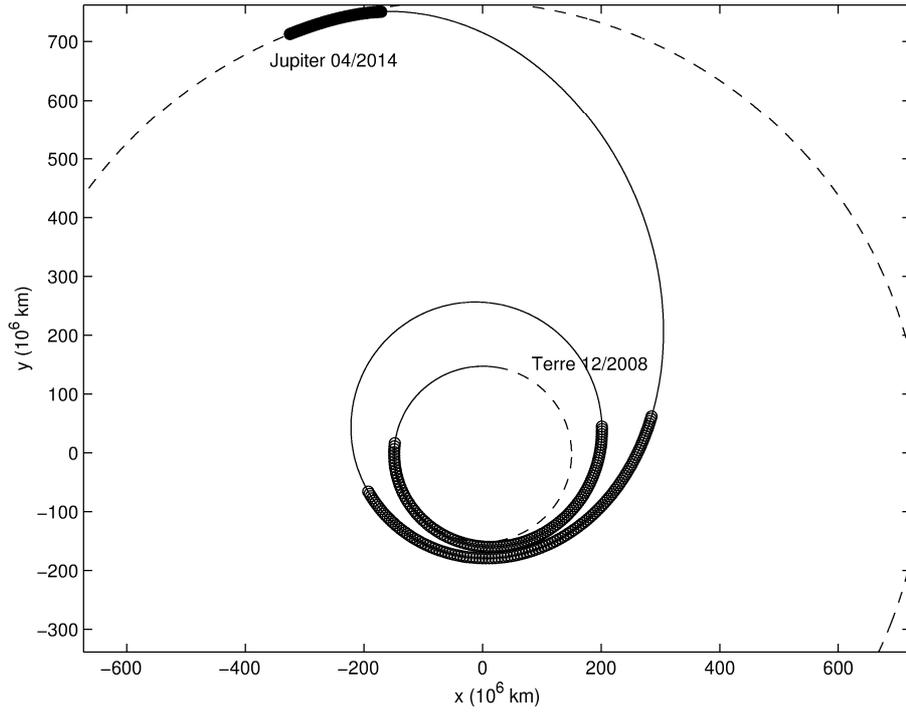


FIG. 10 – Trajectoire Terre-Jupiter associée à la solution  $s_1$ .

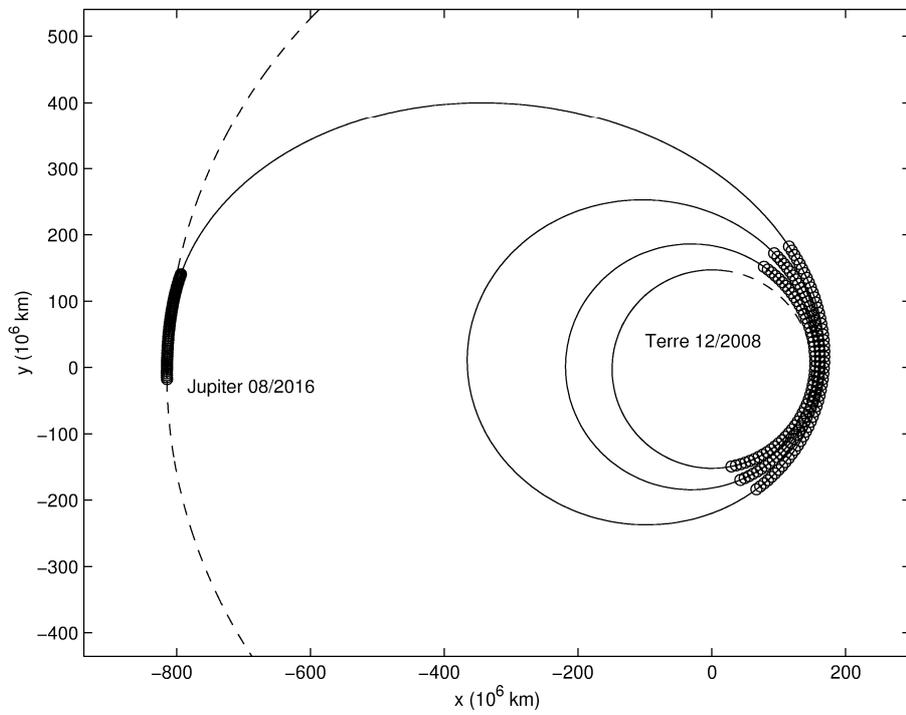


FIG. 11 – Trajectoire Terre-Jupiter associée à la solution  $s_2$ .

## 5 Conclusions

Les techniques de lissage et continuation proposées dans cette note technique ont permis la résolution de problèmes à solution "bang-bang" très difficiles à résoudre d'un point de vue numérique. L'originalité de cette étude a été d'une part d'utiliser des barrières logarithmiques dans le cadre de la commande optimale, et d'autre part de proposer des résultats théoriques permettant de générer diverses fonctions de pénalités. Au travers des exemples proposés, les meilleurs résultats, en termes de convergence des fonctions de tir, sont obtenus à l'aide des barrières logarithmiques dans l'approche par lissage et continuation. En ce qui concerne les pénalités, les résultats obtenus avec les pénalités logarithmiques sont meilleurs que ceux obtenus avec la méthode classique de pénalisation quadratique. Tout ceci permet de conclure que l'efficacité numérique des nouvelles techniques de lissage présentées dans cette note est supérieure à celle de la méthode par pénalités quadratiques. Enfin, dans le cadre des transferts interplanétaires, ces techniques de lissage ont permis de trouver les solutions de problèmes n'ayant pu être résolus par la seule utilisation de la méthode de tir simple.

## Références

- [1] V. Barbu. *Optimal control of variational inequalities*. Pitman Advanced Publishing Program, 1984.
- [2] D.J. Bell and D.H. Jacobson. *Singular optimal control problems*. Academic Press, 1975.
- [3] R. Bertrand. *Optimisation de Trajectoires Interplanétaires sous Hypothèses de Faible Pous-sée*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse III, 2001.
- [4] R. Bertrand and R. Epenoy. New smoothing techniques for solving bang-bang optimal control problems - numerical results and statistical interpretation. *Optimal Control Applications and Methods*, 23 :171–197, 2002.
- [5] A.E. Bryson and Y.C. Ho. *Applied optimal control*. Hemisphere Publishing Corporation, 1975.
- [6] J.-B. Caillau and J. Noailles. Coplanar control of a satellite around the earth. *ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 6 :239–258, 2001.
- [7] L. Cesari. *Optimization - Theory and applications*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [8] X. Chen. Superlinear convergence of smoothing quasi-newton methods for nonsmooth equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 80 :105–126, 1997.
- [9] X. Chen. Global and superlinear convergence of the smoothing newton method and its application to general box-constrained variational inequalities. *Mathematical Computing*, 67 :519–540, 1998.
- [10] X. Chen and T. Yamamoto. Convergence domains of certain iterative methods for solving nonlinear equations. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 10 :37–48, 1989.

- [11] X. Chen and Y. Ye. On homotopy-smoothing methods for box-constrained variational inequalities. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 37 :589–616, 1999.
- [12] Y. Chen and J. Huang. A continuation method for singular optimal control synthesis. In *American Control Conference*, volume 2, pages 1256–1260, 1993.
- [13] S. A. Dadebo, K. B. McAuley, and P. J. McLellan. On the computation of optimal singular and bang-bang controls. *Optimal Control, Applications and Methods*, 19 :287–297, 1998.
- [14] T.F. Edgar and L. Lapidus. The computation of optimal singular bang-bang control i : Linear systems. *American Institute of Chemical Engineers Journal*, 18 :774–779, 1972.
- [15] T.F. Edgar and L. Lapidus. The computation of optimal singular bang-bang control ii : Non-linear systems. *American Institute of Chemical Engineers Journal*, 18 :780–785, 1972.
- [16] C. Ferrier and R. Epenoy. Commande optimale pour des engins à propulsion électro-ionique sous contrainte d'éclipse. *Note technique CNES*, 2(141), 2000.
- [17] C. Ferrier and R. Epenoy. Optimal control for engines with electro-ionic propulsion under constraint of eclipse. *Acta Astronautica*, 48(4) :181–192, 2001.
- [18] A. Fiacco and G. McCormick. *Nonlinear Programming : Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. Willey, 1968.
- [19] C.W. Gear and O. Østerby. Solving ordinary differential equations with discontinuities. *ACM. Transactions on Mathematical Software*, 10(1) :23–44, 1984.
- [20] J. Gergaud. *Résolution Numérique de Problèmes de Commande Optimale à Solution Bang-Bang par des Méthodes Homotopiques Simpliciales*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1989.
- [21] J. Gergaud and J. Noailles. Application of simplicial algorithm to a spacecraft trajectory optimization problem. In *7<sup>th</sup> IFAC Workshop on Control Applications of Nonlinear Programming and Optimization*, 1988.
- [22] J. C. Gilbert, C. C. Gonzaga, and E. Karas. Examples of ill-behaved central paths in convex optimization. Technical Report 4179, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 2001.
- [23] D. Goldfarb, S. Liu, and S. Wang. A logarithmic barrier function algorithm for quadratically constrained convex programming. *SIAM Journal of Optimization*, 1 :252–267, 1991.
- [24] K. L. Hiebert. An evaluation of mathematical software that solves systems of nonlinear equations. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 8(1) :5–20, 1982.
- [25] D. R. Hush and B. Horne. Efficient algorithms for function approximation with piecewise linear sigmoidal networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9 :1129–1141, 1998.
- [26] W. Huyer and A. Neumaier. Smooth exact penalty and barrier functions for nonsmooth optimization. Technical report, University of Vienna, 1999.

- [27] D. H. Jacobson, S. B. Gershwin, and M. M. Lele. Computation of optimal singular control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-15 :67–73, 1970.
- [28] NAG. *NAG Fortran library manual Mark 18*. The Numerical Algorithms Groups Inc., The NAG Company, 1996.
- [29] Y. Nesterov. Interior-point methods : an old and new approach to nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 79 :285–297, 1997.
- [30] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyansky, R.V. Gamkrelidze, and E.F. Mishchenko. *The Mathematical theory of optimal processes*. Pergamon Press LTD., 1964.
- [31] D. Stewart. A high accuracy method for solving odes with discontinuous right-hand side. *Numerical Mathematics*, 58 :299–328, 1990.

## Annexes

### A La méthode Hybrid-Powell

Cette méthode a pour but de résoudre un système de  $n$  équations, généralement non linéaires, à  $n$  inconnues. Typiquement, un tel problème peut être vu comme la recherche de racines d'une fonction  $F(\cdot)$  définie comme suit :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ X &\longmapsto F(X) \end{aligned} \quad (129)$$

Comme la majeure partie des méthodes locales de recherche de zéros, la méthode Hybrid-Powell est une méthode itérative. En effet, à partir d'un point initial  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ , les approximations successives d'une racine sont données par la formule de récurrence suivante :

$$X_{k+1} = X_k + \Delta X_k \quad (130)$$

où  $\Delta X_k$  est le pas associé à l'algorithme. La méthode Hybrid-Powell est qualifiée d'hybride car elle peut être vue comme une combinaison d'une méthode de quasi-Newton avec la méthode du gradient. L'idée de Powell fut donc d'élargir les propriétés locales (gradient) tout en gardant l'efficacité des méthodes du type quasi-Newton. De ce fait, pour établir l'expression du pas  $\Delta X_k$ , il est nécessaire de rappeler brièvement l'expression des pas associés aux méthodes quasi-Newton et à celle du gradient.

En ce qui concerne la méthode de Newton, le pas  $\Delta X_k^N$  associé est solution de l'équation suivante :

$$J(X_k)\Delta X_k^N = -F(X_k) \quad (131)$$

où  $J(X_k)$  est la matrice jacobienne de  $F(\cdot)$  prise en  $X_k$ . La manière de calculer cette matrice permet de différencier la méthode de Newton classique des méthodes quasi-Newton. En effet, dans le cadre des méthodes quasi-Newton, la matrice jacobienne est approchée et son approximation est mise à jour au cours des itérations de l'algorithme. Un exemple de ce processus d'approximation est donné par la méthode de Broyden. En notant  $B_k$  l'approximation de la matrice jacobienne à l'itération  $k$ , la matrice  $B_{k+1}$  est alors donnée par :

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y - B_k s)s^T}{s^T s} \quad (132)$$

où :

$$y = F(X_{k+1}) - F(X_k) \quad \text{et} \quad s = X_{k+1} - X_k \quad (133)$$

Le fait d'approcher la matrice jacobienne permet de réduire sensiblement le nombre d'opérations à effectuer au cours d'une itération.

En ce qui concerne la méthode de gradient, le pas  $\Delta X_k^g$  associé est égal à :

$$\Delta X_k^g = -\mu J^T(X_k)F(X_k) \quad (134)$$

TAB. 6 – Algorithme de la méthode Hybrid-Powell.

Etape 1 : Initialisation avec  $X_0$ .

Faire Tant que  $\|F(X_k)\| \geq \epsilon$

Etape  $k + 1$  : Calcul de  $X_{k+1}$  à partir de (130) où  $\Delta X_k$  est solution de (136).

$k \leftarrow k + 1$

Fin Tant que

où  $\mu \in \mathbb{R}$  est solution du problème de minimisation unidimensionnelle suivant :

$$\min_{\mu \geq 0} \|F(X_k) - \mu J^T(X_k)F(X_k)\| \quad (135)$$

Il est, à présent, possible de définir le pas de la méthode Hybrid-Powell en effectuant une combinaison linéaire des pas de Newton et du gradient. Il existe plusieurs formulations de  $\Delta X_k$  dont celle donnée par K.L. Hiebert [24] qui précise que  $\Delta X_k$  doit être solution de l'équation suivante :

$$[\gamma I + J(X_k)^T J(X_k)] \Delta X_k = -J(X_k)f(X_k) \quad (136)$$

où  $I$  désigne ici la matrice identité de taille  $n$ .

Pour conclure, la méthode Hybrid-Powell implémentée dans la routine C05NBF de la bibliothèque mathématique NAG utilise le pas hybride proposé en (136) où la matrice jacobienne  $J(X_k)$  est approchée par la matrice  $B_k$  donnée en (132). L'algorithme général est présenté au tableau 6.

## B Développements analytiques pour les problèmes à solution "bang-bang"

### B.1 Solution analytique de l'exemple simple

Le problème aux deux bouts (ou TPBVP) devant être résolu est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t), & \forall t \in [0, 2] \\ \lambda(t) = \lambda(0) \exp(t) = z \exp(t) \\ x(0) = 0, \quad x(2) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (137)$$

où  $z \in \mathbb{R}$  et où la commande optimale  $u^*(\cdot)$  est donnée par (16).

## B.2 Cas où $z$ est positif

Dans ce cas précis, il convient de séparer les configurations pour lesquelles la commande commute de celles où la commande reste constante sur  $[0, 2]$ .

### Fonction de commutation négative

$$\rho(t) < 0 \Leftrightarrow 1 - z \exp(t) < 0 \Leftrightarrow \exp(-t) < z \quad (138)$$

d'où :

$$\forall z \in ]1, +\infty[, \forall t \in [0, 2], \quad \rho(t) < 0 \text{ et } u(t) = -1 \quad (139)$$

Pour cette configuration, l'état  $x(\cdot)$  est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = -x(t) - 1, \quad x(0) = 0 \quad (140)$$

Cela donne immédiatement :

$$x(t) = \exp(-t) - 1 \quad (141)$$

et permet d'obtenir la formulation de la fonction de tir  $\Phi(\cdot)$  :

$$\Phi(z) = x(2) - \frac{1}{2} = \exp(-2) - \frac{3}{2}, \quad \forall z \in ]1, +\infty[ \quad (142)$$

### Fonction de commutation positive ou nulle

$$\rho(t) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - z \exp(t) \geq 0 \Leftrightarrow \exp(-t) \geq z \quad (143)$$

d'où :

$$\forall z \in [0, \exp(-2)], \forall t \in [0, 2], \quad \rho(t) \geq 0 \text{ et } u(t) = 0 \quad (144)$$

En considérant la condition initiale  $x(0) = 0$ , l'état  $x(\cdot)$  reste nul dans l'intervalle  $[0, 2]$ . La fonction de tir est donc constante et sa valeur est :

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2}, \quad \forall z \in [0, \exp(-2)] \quad (145)$$

### Fonction de commutation de signe quelconque

La fonction de commutation change de signe sur l'intervalle  $[0, 2]$  pour des valeurs de  $z$  comprises dans  $] \exp(-2), 1]$ . Il ne peut exister qu'un seul changement de signe car la fonction  $\rho(\cdot)$  est décroissante sur l'intervalle  $[0, 2]$ . Cet instant est noté  $\bar{t}$  et est égal à  $-\log(z)$ .

t	0	$\bar{t} = -\log(z)$	2
$\rho(t)$	$1 - z \geq 0$	0	$1 - z \exp(-2) < 0$
$\beta(t)$		0	1

Ainsi, il est possible d'écrire que :

$$\forall t \geq \bar{t} = -\log(z), \quad x(t) = C \exp(-t) - 1 \quad (146)$$

et :

$$x(\bar{t}) = 0 \quad \text{car} \quad x(0) = 0 \quad \text{et} \quad u(t) = 0 \quad \forall t \in [0, \bar{t}] \quad (147)$$

Ainsi, la constante  $C$  est égale à  $1/z$ , ce qui permet d'obtenir l'expression de l'état en fonction de la variable  $z$  et du temps  $t$  :

$$x(t) = \frac{\exp(-t)}{z} - 1, \quad \forall t \in [\bar{t}, 2] \quad (148)$$

Finalement, la fonction de tir s'écrit simplement :

$$\Phi(z) = \frac{\exp(-2)}{z} - \frac{3}{2}, \quad \forall z \in ]\exp(-2), 1] \quad (149)$$

### B.3 Cas où $z$ est négatif

La même démarche que celle proposée en section précédente est adoptée. Les cas où la fonction de commutation reste négative, positive ou change de signe sur l'intervalle  $[0, 2]$  sont traités séparément.

#### Fonction de commutation négative

Dans le cas où la fonction de commutation est négative, il est possible d'écrire que :

$$\rho(t) < 0 \Leftrightarrow 1 + z \exp(t) < 0 \Leftrightarrow z < -\exp(-t) \quad (150)$$

d'où :

$$\forall z \in ]-\infty, -1[, \forall t \in [0, 2], \quad \rho(t) < 0 \quad \text{et} \quad u(t) = 1 \quad (151)$$

Pour cette configuration, l'état  $x(\cdot)$  est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 1, \quad x(0) = 0 \quad (152)$$

Ce qui donne immédiatement :

$$x(t) = 1 - \exp(-t) \quad (153)$$

Ceci permet d'obtenir la formulation de la fonction de tir  $\Phi(\cdot)$  :

$$\Phi(z) = x(2) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \exp(-2), \quad \forall z \in ]-\infty, -1[ \quad (154)$$

### Fonction de commutation positive ou nulle

De la même façon que précédemment, il vient :

$$\rho(t) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + z \exp(t) \geq 0 \Leftrightarrow z \geq -\exp(-t) \quad (155)$$

d'où :

$$\forall z \in [-\exp(-2), 0], \forall t \in [0, 2], \rho(t) \geq 0 \text{ et } u(t) = 0 \quad (156)$$

En considérant la condition initiale  $x(0) = 0$ , l'état  $x(\cdot)$  reste nul dans l'intervalle  $[0, 2]$ . La fonction de tir est donc constante et sa valeur est :

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2}, \quad \forall z \in [-\exp(-2), 0] \quad (157)$$

### Fonction de commutation de signe quelconque

La fonction de commutation change de signe sur l'intervalle  $[0, 2]$  pour des valeurs de  $z$  comprises dans  $] -1, -\exp(-2)]$ . L'instant de changement de signe est noté  $\underline{t}$  et est égal à  $-\log(-z)$  ( $z < 0$ ).

t	0	$\underline{t} = -\log(-z)$	2
$\rho(t)$	$1 + z \geq 0$	0	$1 + z \exp(2) < 0$
$\beta(t)$		0	1

Ainsi, il est possible d'écrire que :

$$\forall t \geq \underline{t} = -\log(-z), \quad x(t) = C \exp(-t) + 1 \quad (158)$$

et :

$$x(\underline{t}) = 0 \text{ car } x(0) = 0 \text{ et } u(t) = 0 \quad \forall t \in [0, \underline{t}] \quad (159)$$

Ainsi, la constante  $C$  est égale à  $1/z$  ce qui permet d'obtenir l'expression de l'état en fonction de la variable  $z$  et du temps  $t$  :

$$x(t) = \frac{\exp(-t)}{z} + 1, \quad \forall t \in [\underline{t}, 2] \quad (160)$$

Finalement, la fonction de tir s'écrit simplement :

$$\Phi(z) = \frac{\exp(-2)}{z} + \frac{1}{2}, \quad \forall z \in ] -1, -\exp(-2)] \quad (161)$$

## B.4 Conclusion

En regroupant tous les cas de figure étudiés ci-dessus, l'expression générale de la fonction de tir est finalement donnée par :

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \exp(-2) & \text{si } z \in ]-\infty, -1[ \\ \frac{\exp(-2)}{z} + \frac{1}{2} & \text{si } z \in [-1, -\exp(-2)[ \\ -\frac{1}{2} & \text{si } z \in [-\exp(-2), \exp(-2)[ \\ \frac{\exp(-2)}{z} - \frac{3}{2} & \text{si } z \in [\exp(-2), 1[ \\ \exp(-2) - \frac{3}{2} & \text{si } z \in [1, +\infty[ \end{cases} \quad (162)$$

## C Approche par pénalités quadratiques

### C.1 Calcul de la commande optimale

Cette section a pour but de démontrer les formules (31), (32) et (33) qui donnent l'expression de la commande optimale  $u_\epsilon^*(\cdot)$  dans le cas de pénalités quadratiques. Les développements analytiques qui suivent permettent de montrer que la détermination de cette commande se réduit à un problème de minimisation d'une fonction, notée  $k_\epsilon^1(\cdot)$ , à une seule variable.

En appliquant le PMP, quel que soit  $t$  dans  $[t_0, t_1]$ , il est possible d'écrire  $u_\epsilon^*(t)$  de la façon suivante :

$$u_\epsilon^*(t) = \arg \min_{\|w\| \leq 1} \|w\| + \lambda(t)^T g(x(t))w - \epsilon[\|w\|(1 - \|w\|)] \quad (163)$$

Si  $\lambda(t)^T g(x(t))$  est égal à 0, il est clair que  $u_\epsilon^*(t)$  est aussi égal à 0. Dans le cas contraire, l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne pour tout  $w$  tel que  $\|w\| \leq 1$  :

$$\|w\| + \lambda(t)^T g(x(t))w - \epsilon[\|w\|(1 - \|w\|)] \geq \|w\|(1 - \|g(x(t))^T \lambda(t)\|) - \epsilon\|w\|(1 - \|w\|), \quad (164)$$

L'égalité est obtenue lorsque les vecteurs  $g(x(t))^T \lambda(t)$  et  $w$  sont colinéaires et de sens opposé, i.e.

$$w = -\kappa(t) g(x(t))^T \lambda(t), \quad \kappa(t) > 0 \quad (165)$$

Ainsi  $u_\epsilon^*(t)$  peut s'écrire sous la forme (165) où :

$$\|u_\epsilon^*(t)\| = \kappa(t) \|g(x(t))^T \lambda(t)\| = \beta_\epsilon^1(t) \quad (166)$$

est solution de :

$$\min_{0 \leq y \leq 1} [k_\epsilon^1(y) = y\rho(t) - \epsilon y(1 - y)] \quad (167)$$

avec  $\rho(t) = 1 - \|g(x(t))^T \lambda(t)\|$  comme fonction de commutation du problème. La solution de ce problème permet immédiatement d'obtenir (33), ce qui permet de déduire (31).

## C.2 Calcul de la fonction de pénalité à partir du choix de la fonction de densité

Soit la fonction de densité  $f_0^1(\cdot)$  suivante :

$$f_0^1(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } |s| > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } |s| \leq 1 \end{cases} \quad (168)$$

La fonction  $\tilde{\beta}_\epsilon^1(\cdot)$  associée est donnée par :

$$\tilde{\beta}_\epsilon^1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\beta}\left(\frac{z}{\epsilon} - s\right) f_0^1(s) ds = \begin{cases} 1 & \text{si } z \leq -\epsilon \\ \frac{1}{2} - \frac{z}{2\epsilon} & \text{si } |z| \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } z \geq \epsilon \end{cases} \quad (169)$$

Cette fonction est aussi solution du problème suivant :

$$\min_{0 \leq y \leq 1} \left[ \Theta_\epsilon^1(y) = \frac{z}{\epsilon} y - F^1(y) \right] \quad (170)$$

La fonction  $\Theta_\epsilon^1(\cdot)$  peut alors s'écrire :

$$\Theta_\epsilon^1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{z}{\epsilon} - s\right) q_y^1(s) f_0^1(s) ds = \frac{z}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} q_y^1(s) f_0^1(s) ds - \int_{-\infty}^{\infty} s q_y^1(s) f_0^1(s) ds \quad (171)$$

où  $q_y^1(s)$  prend la forme suivante :

$$q_y^1(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq s_y^1 \\ 1 & \text{si } s > s_y^1 \end{cases} \quad (172)$$

En résolvant l'équation suivante par rapport à  $s_y^1$  pour  $y$  fixé dans  $[0, 1]$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_y^1(s) f_0^1(s) ds = \int_{s_y^1}^{\infty} f_0^1(s) ds = y \quad (173)$$

on a :

$$s_y^1 = 1 - 2y \quad (174)$$

cela implique que :

$$\forall y \in [0, 1], -1 \leq s_y^1 \leq 1 \quad (175)$$

De plus,

$$F^1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} s q_y^1(s) f_0^1(s) ds = \int_{s_y^1}^1 s f_0^1(s) ds = \frac{1}{2}(1 - s_y^1{}^2) \quad (176)$$

En remplaçant  $s_y^1$  par son expression en fonction de  $y$ , voir égalité (174), il vient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} s q_y^1(s) f_0^1(s) ds = F^1(y) = y(1 - y) \quad (177)$$

La fonction de pénalité quadratique est ainsi retrouvée.